

**LIOUVILLE-SÄTZE FÜR
HARMONISCHE ABBILDUNGEN UND FUNKTIONEN
AUF RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN
PARTIELL NEGATIVER RICCI-KRÜMMUNG**

DISSERTATION

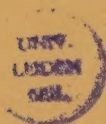
zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

JÜRGEN KAMPMANN

aus Castrop-Rauxel

Bochum 1983



**LIOUVILLE-SÄTZE FÜR
HARMONISCHE ABBILDUNGEN UND FUNKTIONEN
AUF RIEMANNSCHEN MANNIGFALTIGKEITEN
PARTIELL NEGATIVER RICCI-KRÜMMUNG**

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

JÜRGEN KAMPMANN

aus Castrop-Rauxel

Bochum 1983

LOUVILLE-SÄTZE FÜR

HARMONISCHE ABBLDUNGEN UND FUNKTIONEN
AUF RIEMANNSCHEM MANIFOLDTYPEN
PARTIELL NEGATIVER RICCI-KRÜMMUNG

DSSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Mathematik
an der Fakultät für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

VON

JÜRGEN KAMMANN

aus Geseke-Paderborn

Dissertation eingereicht am: 03.11.1983
Tag der mündlichen Prüfung: 21.12.1983
Dekan: Prof. Dr. H. Zieschang
Referenten: Prof. Dr. R. Böhme
Prof. Dr. K. Spallek

0. Einleitung

I - VI

<u>1. Harmonische Abbildungen, nicht lineare elliptische Differentialgleichungssysteme und der Einfluß der Krümmung: Ein erster Überblick</u>	1
<u>2. Differentialgeometrische Grundlagen, invariante Theorie harmonischer Abbildungen, Weitzenböck-Formel</u>	15
<u>2.1. Differentialgeometrische Grundlagen</u>	15
<u>2.2. Invariante Theorie harmonischer Abbildungen</u>	29
<u>2.3. Die Weitzenböck-Formel</u>	36
<u>3. Der geodätische Abstand: Definition, Differenzierbarkeit und Abschätzungen</u>	40
<u>3.1. Definition und Differenzierbarkeit des geodätischen Abstands r_M</u>	40
<u>3.2. Das Gradientenfeld von r_M und Formel für $\Delta_M r_M, \Delta_M (r_M)^2$</u>	43
<u>3.3. Ein Vergleichssatz für den Laplace-Beltrami-Operator</u>	47
<u>3.4. Eine Abschätzung für $\Delta_M r_M$ und $\Delta_M (r_M)^2$</u>	55
<u>3.5. Konstruktion und Abschätzung einer Support-Funktion</u>	58
<u>3.6. Ein Vergleichssatz für Hesse-Tensoren</u>	60
<u>4. Ein analytischer Beweis des Satzes von Yau</u>	62
<u>4.1. Bezeichnungen und Hilfsmittel</u>	62

<u>4.2.</u> Der Beweis von Satz 4.1.	67
<u>5. Liouville-Sätze für harmonische Abbildungen und Funktionen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten mit partiell negativer Ricci-Krümmung</u>	76
<u>5.1.</u> Einführung, Zusammenfassung der Hauptergebnisse und eine Skizze der Beweisidee	76
<u>5.2.</u> Konstruktion der Abschneidefunktion	83
<u>5.3.</u> Beweis von Satz 5.1.	86
<u>5.4.</u> Beweis von Satz 5.2.	97
<u>5.5.</u> Beweis von Satz 5.3.	100
<u>6. Bemerkungen zur Anwendung: Liouville-Sätze und Brownsche Bewegung auf riemannschen Mannigfaltigkeiten</u>	108
<u>7. Anhang</u>	113
<u>7.1.</u> Einige Hilfssätze	113
<u>7.2.</u> Tabellarische Übersicht	131
<u>8. Literatur</u>	135

O. Einleitung

Seit einigen Jahren hat die Wechselbeziehung zwischen partiellen Differentialgleichungen und Differentialgeometrie, insbesondere Fragen der Differentialgeometrie im Großen, erneut großen Einfluß auf die Interessen mathematischer Forschung gewonnen. Die beiden Übersichtsartikel von S.T. Yau [69] und S. Hildebrandt [29] zeigen deutlich das große Spektrum interessanter Fragestellungen aus diesem Themenkreis.

In dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit einem speziellen Band dieses Spektrums, nämlich mit harmonischen Funktionen und Abbildungen auf bzw. zwischen riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Harmonische Abbildungen sind kritische Punkte des Energiefunktionals und lokal darstellbar als Lösungen partieller, elliptischer Differentialgleichungssysteme.

Über die gesamte Bandbreite der Theorie harmonischer Abbildungen berichten die Übersichtsartikel von J. Eells, J.H. Sampson [11] und J. Eells, L. Lemaire [12]. Eine kurze Einordnung in die Theorie nicht linearer, elliptischer Differentialgleichungssysteme mit einer Darstellung der Besonderheiten harmonischer Abbildungen im Rahmen dieser Theorie enthält Kapitel 1 dieser Arbeit.

Wir betrachten im folgenden eine "Spektrallinie" aus dem "Band harmonische Abbildungen" des "Spektrums partielle Differentialgleichungen/Differentialgeometrie" nämlich die Sätze vom Liouville-Typ.

Der klassische Liouville-Satz besagt, daß jede ganze, beschränkte Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ von $\Delta u = 0$, d.h. jede ganze, beschränkte harmonische Funktion auf $\mathbb{R}^n$, konstant ist. Es gibt also nur triviale ganze, beschränkte harmonische Funktionen auf $\mathbb{R}^n$. (Diese Aussage folgt aus der im Jahre 1844 veröffentlichten Feststellung von J. Liouville und A. Cauchy, *Compte Rendus* 19 (1844) 1261-1263 bzw. 1337-1344, daß jede beschränkte, ganze, holomorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ konstant ist.

Zur Geschichte dieses funktionentheoretischen Satzes vgl. S. Hildebrandt [28], S. 107)

Uns interessieren die Fragen, unter welchen Bedingungen an die riemannsche Mannigfaltigkeit M ein solcher Liouville-Satz für harmonische Funktionen $u \in C^2(M)$ gilt und unter welchen Bedingungen an die riemannschen Mannigfaltigkeiten M (Urbildmannigfaltigkeit) und N (Bildmannigfaltigkeit) ein Liouville-Satz für harmonische Abbildungen $u \in C^2(M, N)$ gilt.

Solche Liouville-Sätze für harmonische Funktionen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten und harmonische Abbildungen zwischen riemannschen Mannigfaltigkeiten sind unter verschiedenen Gesichtspunkten interessant:

Zunächst können analog zur Klassifikation riemannscher Flächen Liouville-Sätze für harmonische Funktionen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten zur Klassifikation nicht kompakter riemannscher Mannigfaltigkeiten herangezogen werden.

Andererseits benutzen S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman [30] einen Liouville-Satz für harmonische Abbildungen zwischen riemannschen Mannigfaltigkeiten und die Harmonizität der Gauß-Abbildung zum Beweis eines Bernstein-Satzes für minimale Hyperflächen.

In der Quantenfeldtheorie innerhalb der mathematischen Physik wird das nicht lineare σ -Modell, insbesondere das 2-dimensionale nicht lineare σ -Modell, als klassisches feldtheoretisches Analogon zu reinen höherdimensionalen Eichtheorien betrachtet (vgl. M. Forger [14]). Mathematisch ist der Raum der Feldkonfigurationen des n -dimensionalen σ -Modells gerade der Raum der (glatten) Abbildungen $\sigma : X \rightarrow M$; dabei ist M i.a. eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit und $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen bzw. der Minkowski-Metrik. Das physikalische Wirkungsintegral (action) entspricht gerade dem Energiefunktional von σ . Die klassisch erlaubten Feldkonfigurationen des σ -Modells entsprechen genau den kritischen Punkten dieses Funktionals; die zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen sind

die entsprechenden Feldgleichungen. Wir haben also (vgl. M. Forger [14] § 2): Die harmonischen Abbildungen $\sigma : X \rightarrow M$ sind als kritische Punkte des Energiefunktionalis gerade die klassisch erlaubten Feldkonfigurationen des nicht linearen σ -Modells.

Neben Regularitätsuntersuchungen für solche Feldkonfigurationen (vgl. Borchers, H.J.; Garber, W.D. [4]) haben Garber, W.D.; Ruijsenaars, S.N.M.; Seiler, E.; Burns, D. [15] einen Satz vom Liouville-Typ für Lösungen des nicht linearen σ -Modells mit beschränkter Energie bewiesen (eine Verallgemeinerung beweist S. Hildebrandt [28], Theorem 10, sowie P. Price [56]).

Auf eine Verbindung zwischen Liouville-Sätzen für harmonische Funktionen und der Brownschen Bewegung auf riemannschen Mannigfaltigkeiten gehen wir kurz im 6. Kapitel dieser Arbeit ein.

Für eine kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit M erhalten wir eine Antwort auf unsere Frage nach Liouville-Sätzen direkt aus E. Hopfs Maximumprinzip für elliptische partielle Differentialgleichungen (vgl. Yano, K.; Bochner, S. [65]):

Jede harmonische Funktion $u \in C^2(M)$ ist konstant; auf einer kompakten Mannigfaltigkeit gibt es also nur triviale harmonische Funktionen.

Wir setzen daher generell voraus, daß die von uns betrachteten Mannigfaltigkeiten nicht kompakte C^∞ -Mannigfaltigkeiten sind.

Für eine nicht kompakte, vollständige, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit M beweist S.T. Yau [66], S. 217, daß jede einseitig beschränkte harmonische Funktion auf M konstant ist, falls die Ricci-Krümmung von M nicht negativ ist.

Dieses Ergebnis verallgemeinern S.Y. Cheng [7] und H.I. Choi [9] für harmonische Abbildungen zwischen nicht kompakten, vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeiten M und N .

S.Y. Cheng zeigt, daß jede beschränkte (genauer sogar jede "sublinear" wachsende) harmonische Abbildung $u \in C^2(M, N)$

konstant ist, falls N nicht positive Schnittkrümmung hat und die Ricci-Krümmung von M nicht negativ ist.

H.I. Choi kann die Bedingungen an die Schnittkrümmung von N so abändern, daß sie der Bedingung im Existenzsatz für das Dirichlet-Problem von S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-O. Widman [33] entspricht: Jede harmonische Abbildung $u \in C^2(M, N)$ mit "kleinem" Bild $u(M) \subseteq B_R(z_0) \subseteq N$ in einer geodätischen Kugel in N , die disjunkt zum Schnittpunkt ihres Zentrums z_0 ist und deren Radius $R < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$ ($K > 0$) ist, ist konstant, falls die Schnittkrümmung von N kleiner oder gleich K ist und die Ricci-Krümmung von M nicht negativ ist.

Wesentlicher Bestandteil dieser drei Liouville-Sätze sind die globalen Krümmungsvoraussetzungen an die Urbildmannigfaltigkeit M und an die Bildmannigfaltigkeit N . Insbesondere bezüglich der globalen Forderung einer nicht negativen Ricci-Krümmung der Urbildmannigfaltigkeit M sagt H. Wu [63] nach einer Darstellung des Liouville-Satzes von S.T. Yau:

"... It is natural to ask whether one can find a general theorem that includes both Theorems 1 (R.E. Greene, H. Wu [22], S. 57; Anm. des Verf.) and 2 (S.T. Yau [66], S. 217; Anm. des Verf.) as special cases. Short of that, one would want to generalize Theorem 2 to allow for 'a small amount' of negative Ricci-curvature." (Heraushebung durch den Verf.)

Dem letzten Aspekt der Äußerung H. Wus gilt der Hauptteil dieser Arbeit.

In Kapitel 1 zeigen wir an Hand eines Beispiels, daß S.T. Yaus Liouville-Satz nicht auf Mannigfaltigkeiten mit global echt negativer Ricci-Krümmung gilt.

In Kapitel 5 verallgemeinern wir die Ergebnisse von S.T. Yau, S.Y. Cheng und H.I. Choi auf Urbildmannigfaltigkeiten M deren Ricci-Krümmung außerhalb einer beschränkten Menge $\Omega \subseteq M$ nicht negativ ist. In einer beschränkten Menge $\Omega \subset M$ brauchen wir also keine Voraussetzung an das Vorzeichen der

Ricci-Krümmung (Satz 5.1., Satz 5.3.).

Zusätzlich erhalten wir für Bildmannigfaltigkeiten N , deren Schnittkrümmung nach oben durch eine positive reelle Konstante beschränkt ist, einen Liouville-Satz (Satz 5.2.), in dem wir keine von der Schnittkrümmung von N abhängige Kleinheitsbedingung an das Bild $u(M) \subseteq N$ stellen, sondern eine von den Krümmungsschranken abhängige Schranke für die Energiedichte, das ist bis auf den Faktor 2 das Betragsquadrat des verallgemeinerten Gradienten, der Abbildung u fordern.

In den Rahmen des Liouville-Satzes von H.I. Choi und der Sätze 5.2. und 5.3. dieser Arbeit gehört der Liouville-Satz von S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman [30], der ebenfalls die von der oberen Schranke für die Schnittkrümmung der Bildmannigfaltigkeit abhängige Kleinheitsbedingung für $u(M)$ fordert. Außerdem benötigen S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman wegen der anderen Beweistechnik (Abschätzung der Hölder-Norm mit Methoden der elliptischen Regularitätstheorie) einschränkende Voraussetzungen an die "Kartographie" der Urbildmannigfaltigkeit M (vgl. dazu die Diskussion in Kapitel 1 dieser Arbeit).

Da wir harmonische Funktionen bzw. harmonische Abbildungen auf der ganzen nicht kompakten Urbildmannigfaltigkeit M betrachten, benötigen wir neben den Voraussetzungen an die Krümmung weitere Hilfsmittel aus der Differentialgeometrie im Großen (insbesondere Vergleichssätze und Abschätzungen für den geodätischen Abstand) und eine invariante (von den speziellen lokalen Karten unabhängige) Darstellung harmonischer Abbildungen. Diese Hilfsmittel werden in den Kapiteln 2 und 3 der Arbeit entwickelt.

Im 4. Kapitel beweisen wir S.T. Yaus Liouville-Satz mittels der auf R. Schoen zurückgehenden Technik der Abschätzung von L^p -Normen (p hinreichend groß) geeigneter Hilfsfunktionen. Diese Beweistechnik ähnelt sehr den Methoden der Regularitätstheorie schwacher Lösungen elliptischer Differentialgleichungen. Außer einer kurzen Skizze in S.T. Yau [69] gibt es nach

Wissen des Verfassers bisher keine ausführliche Darstellung dieser Beweisvariante.

Im Anhang der Arbeit (Kapitel 7) werden zum einen einige technische Hilfssätze zusammengestellt; zum anderen enthält der Anhang eine tabellarische Übersicht der dem Verfasser bekannten Sätze vom Liouville-Typ für harmonische Funktionen und Abbildungen auf bzw. zwischen riemannschen Mannigfaltigkeiten. Dies soll einen kleinen Einblick in die "Feinstruktur" der "Spektrallinie Liouville-Sätze" geben.

Diese Arbeit entstand auf Anregung von
Herrn Prof. Dr. Reinhold Böhme, Bochum.

Ihm danke ich für sein unermüdliches Interesse, seine stete Gesprächsbereitschaft und seine Hinweise auf den geometrischen Gehalt analytischer Untersuchungen.

Meinen akademischen Lehrern Prof. Dr. W. von Wahl,
Prof. Dr. M. Wiegner (Bayreuth) und Prof. Dr. E. Zehnder (Bochum)
verdanke ich die Motivation zur Analysis.

Nicht zuletzt möchte ich meinen Kollegen, Dr. P.A. Ivert (Linköping)
und Dr. M. Söllner (Bochum), für ihr freundschaftliches Interesse
danken.

1. Harmonische Abbildungen, nicht lineare elliptische Differentialgleichungssysteme und der Einfluß der Krümmung:
Ein erster Überblick

Harmonische Abbildungen der Klasse $C^2(M, N)$ zwischen endlich-dimensionalen riemannschen C^∞ -Mannigfaltigkeiten (M, g) und (N, γ) sind die kritischen Punkte des Energiefunktionals

$$(1) \quad E(u) = \int_M e(u) \, d\text{vol}(M)$$

Dabei ist die Energiedichte $e(u)$ die Spur bezüglich des metrischen Tensors g von M des "pull-back" des metrischen Tensors γ von N unter der Abbildung u , genauer:

$$(2) \quad e(u) = \frac{1}{2} \text{Sp}_M \langle u_*, u_* \rangle_N .$$

In lokalen Koordinaten $x = (x_1, \dots, x_m)$ in M und $u = (u^1, \dots, u^n)$ in N gilt

$$(3) \quad e(u) = \frac{1}{2} \gamma_{\alpha\beta}(u) g^{ij}(x) D_i u^\alpha D_j u^\beta ;$$

dabei wird, der Einsteinschen Summationskonvention entsprechend, über lateinische Indizes i, j von 1 bis $m = \dim M$ und über griechische Indizes α, β von 1 bis $n = \dim N$ summiert.

Das Volumenelement von M ist in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$d\text{vol}(M) = \sqrt{\det g_{ij}(x)} \, dx .$$

Die kritischen Punkte $u \in C^2(M, N)$ des Energiefunktional E entsprechen gerade den klassischen Lösungen der zum Energiefunktional E zugehörigen Euler-Lagrange-Gleichungen, die in lokalen Koordinaten in der Form

$$(4) \quad \Delta_M u^\alpha + N_{\beta\gamma}^\alpha(u) g^{ij} D_i u^\beta D_j u^\gamma = 0, \quad 1 \leq \alpha \leq n ,$$

geschrieben werden können.

Dabei ist

$$(5) \Delta_M u^\alpha = \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} D_i (\sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} D_j u^\alpha)$$

der Laplace-Beltrami-Operator auf M angewandt auf die Funktion u^α . $g = (g_{ij})$ ist der metrische Tensor auf M in lokalen Koordinaten, $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$, und $N_{\beta\gamma}^\alpha$ sind die Christoffelsymbole zum riemannschen Zusammenhang (Levi-Civita-Zusammenhang) auf N in lokalen Koordinaten. Unter einem Vektorfeld längs u versteht man eine C^∞ -Abbildung $v : M \rightarrow T(N)$, für die $\pi \circ v = u$ gilt. Dabei ist $T(N)$ das Tangentialbündel über N und $\pi : T(N) \rightarrow N$ die zugehörige Bündelprojektion.

Definiert man für zwei Vektorfelder v_1, v_2 längs u

$$\langle v_1, v_2 \rangle_u := \int_M \langle v_1(x), v_2(x) \rangle_{T_{u(x)}N} d\text{vol}(M),$$

dann erhält man für die Richtungsableitung des Energiefunktional E an der Stelle u in Richtung des Vektorfeldes v längs u:

$$D_v E(u) = \frac{d}{dt} [E(u_t)]_{t=0} = - \langle \tau(u), v \rangle_u$$

mit $u_t(x) := \exp_{u(x)}(tv(x))$, wobei $\exp_{u(x)} : T_{u(x)}N \rightarrow N$ die Exponentialabbildung ist.

Das Vektorfeld $\tau(u)$ längs u heißt Spannungsfeld (tension field) von u.

In lokalen Koordinaten erhält man für die Komponenten des Spannungsfeldes von u (vgl. J. Eells, J.H. Sampson [11], S. 116):

$$(6) \tau(u)^\alpha = \Delta_M u^\alpha + N_{\beta\gamma}^\alpha(u) g^{ij} D_i u^\beta D_j u^\gamma, \quad 1 \leq \alpha \leq n.$$

Man erhält also zusammenfassend für $u \in C^2(M, N)$:

$u \in C^2(M, N)$ ist eine harmonische Abbildung genau dann, wenn u ein kritischer Punkt des Energiefunktional E ist.

Dies ist (für $u \in C^2(M, N)$) äquivalent zu $D_{\sqrt{v}}E(u) = 0$ für alle Vektorfelder v längs u also $\tau(u) = 0$, d.h.

$\tau(u)^\alpha = 0$ für $1 \leq \alpha \leq n$.

Im Fall $N = \mathbb{R}$, also $u \in C^2(M, \mathbb{R})$, entspricht $\tau(u) = 0$ der Gleichung

$$(7) \quad \Delta_M u = 0,$$

in diesem Fall ist $u \in C^2(M, \mathbb{R})$ eine harmonische Funktion auf M .

In lokalen Koordinaten gilt: $u \in C^2(M, \mathbb{R})$ ist harmonisch, falls

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} D_i (\sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} D_j u) = 0.$$

In lokalen Koordinaten entsprechen also harmonische Abbildungen $u \in C^2(M, N)$ Lösungen des quasilinearen elliptischen Differentialgleichungssystems (4), und harmonische Funktionen $u \in C^2(M, \mathbb{R}) = C^2(M)$ auf M entsprechen Lösungen der linearen elliptischen Differentialgleichung in Divergenzform (8).

Da für die Frage nach höherer Differenzierbarkeit harmonischer Abbildungen $u \in C^2(M, N)$ nur lokale Eigenschaften maßgebend sind, erhält man aus der Regularitätstheorie für elliptische Differentialgleichungen und elliptische Differentialgleichungssysteme den folgenden

Regularitätssatz: (J. Eells, J.H. Sampson [11], S. 117)

Jede Abbildung $u : M \rightarrow N$ aus $C^2(M, N)$, die $\tau(u) = 0$ erfüllt, ist aus $C^\infty(M, N)$. Falls die Mannigfaltigkeiten M und N analytisch sind, ist auch u analytisch. Insbesondere ist jede harmonische Abbildung $u \in C^2(M, N)$ bzw. jede harmonische Funktion $u \in C^2(M)$ bereits von der Klasse C^∞ .

Harmonische Abbildungen sind seit langem Gegenstand der mathematischen Forschung. Die klassischen Resultate findet man in dem Übersichtsartikel [11] von J. Eells und J.H. Sampson.

Neuere Ergebnisse und Ansätze sind in dem Übersichtsartikel [12] von J. Eells und L. Lemaire enthalten.

Unter dem Gesichtspunkt der Theorie partieller Differentialgleichungen und Systeme partieller Differentialgleichungen gibt es bezüglich harmonischer Abbildungen zwischen riemannschen Mannigfaltigkeiten drei Fragestellungen:

- 1) Existenz und Eindeutigkeit harmonischer Abbildungen
- 2) Regularität harmonischer Abbildungen
- 3) Qualitative Eigenschaften:
 - Maximumprinzip
 - à priori-Abschätzungen
 - Liouville-Sätze

Existenzsätze für klassische harmonische Abbildungen und schwach harmonische Abbildungen, also schwache Lösungen $u \in H^{1,2}(M,N)$ des Systems (4) der Euler-Lagrange-Gleichungen, sind enthalten in den Arbeiten von J. Eells, J.H. Sampson [11]; R. Hamilton [24]; S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-O. Widman [31], [32], [33]; R. Schoen, S.T. Yau [60] und J. Jost [39], [41]. Eindeutigkeitsätze für harmonische Abbildungen behandeln P. Hartman [25], J.H. Sampson [58]; W. Jäger, H. Kaul [37], [38] und J. Jost [40]. Die Frage nach der Regularität klassischer harmonischer Abbildungen $u \in C^2(M,N)$ ist durch den oben zitierten Regularitätssatz von J. Eells, J.H. Sampson [11] beantwortet.

Grundlegend für die Frage nach höherer Regularität schwach harmonischer Abbildungen ist die Regularitätstheorie für quasilineare elliptische Differentialgleichungssysteme.

Nach S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-O. Widman [33] ist eine Abbildung $u \in H^{1,2}(M,N)$ schwach harmonisch genau dann, wenn sie schwache Lösung des elliptischen Differentialgleichungssystems (4) ist, genau dann, wenn sie kritischer Punkt des Energiefunktionals E ist.

Mit Hilfe der "bootstrap"-Methoden der elliptischen Regularitätstheorie erhält man folgenden (vgl. J. Eells, L. Lemaire [12], S. 10) Regularitätssatz für schwach harmonische Abbildungen: Jede schwach harmonische Abbildung $u \in H^{1,2}(M,N) \cap C^0(M,N)$ ist glatt, d.h. $u \in C^\infty(M,N)$.

Ebenso wie einen Beweis dieses Regularitätssatzes enthält die Arbeit [33] von S. Hildebrandt, H. Kaul, K.-O. Widman ein Beispiel einer schwach harmonischen Abbildung $u \in H^{1,2}(M,N)$, die nicht stetig, also nicht aus $C^0(M,N)$ ist, für $\dim M \geq 3$.

Für schwach harmonische Abbildungen gilt also kein genereller Regularitätssatz; die Schwierigkeit unter zusätzlichen, einschränkenden Voraussetzungen höhere Regularität schwach harmonischer Abbildungen zu zeigen, liegt im Nachweis der Stetigkeit der Abbildung.

S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman [30] beweisen die Hölderstetigkeit (und damit die Regularität) schwach harmonischer Abbildungen unter der Zusatzvoraussetzung, daß das Bild $u(M) \subseteq N$ "klein" in Abhängigkeit von geometrischen Daten (Schnittkrümmung) der Bildmannigfaltigkeit N ist.

A. Tachikawa [62] kann diese Kleinheitsbedingung abschwächen unter der zusätzlichen Annahme, daß u ein echtes lokales Minimum des Energiefunktional E ist.

M. Giaquinta, E. Giusti [16] und R. Schoen, K. Uhlenbeck [61] beweisen partielle Regularität und Aussagen über die Hausdorff-Dimension der Singularitätenmenge. Ein wenig vereinfacht gilt folgender

Satz über partielle Regularität:

Jede beschränkte, energieminimierende, schwach harmonische Abbildung $u \in H^{1,2}(M,N)$ ist regulär (im Inneren) außer auf einer abgeschlossenen Menge Σ (Singularitätenmenge) der Hausdorff-Dimension $\leq m-3$, $m = \dim M$.

Maximumprinzipien für harmonische Abbildungen findet man u.a.

bei J.H. Sampson [58] und J. Jost [42].

A priori-Abschätzungen für harmonische Abbildungen enthalten u.a. die Arbeiten von M. Giaquinta, S. Hildebrandt [17]; J. Jost, H. Karcher [71] und E. Sperner [72].

In den letzten Jahren wurden unter verschiedenen Voraussetzungen Liouville-Sätze für harmonische Funktionen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten und harmonische Abbildungen zwischen riemannschen Mannigfaltigkeiten bewiesen. Einen Überblick über die Methoden und Ergebnisse enthalten die Arbeiten von S. Hildebrandt [26], [27], [28] und S.T. Yau [69]; eine tabellarische Übersicht ist im Anhang dieser Arbeit zusammengestellt.

Zunächst stellt man fest, daß die aus der Theorie elliptischer partieller Differentialgleichungen und elliptischer Differentialgleichungssysteme bekannten Liouville-Sätze (für einen Überblick über die Ergebnisse vgl. S. Hildebrandt [26], S. Hildebrandt, K.-O. Widman [34], P.A. Ivert [36], M. Meier [52], J. Kampmann [43]) nur bedingt anwendbar sind. Die dort betrachteten Differentialgleichungssysteme sind von der Form

$$(9) \quad D_i(a_{ij}(x, u, \nabla u) D_j u^\alpha) = f^\alpha(x, u, \nabla u), \quad 1 \leq \alpha \leq n$$

mit einem gleichmäßig elliptischen Operator

$$(10) \quad A^\alpha(x, u, \nabla u) := D_i(a_{ij}(x, u, \nabla u) D_j u^\alpha)$$

in Divergenzform; es gibt also reelle Zahlen $\Lambda > \lambda > 0$ mit

$$(11) \quad \lambda |\xi|^2 \leq a_{ij}(x, z, p) \xi_i \xi_j \leq \Lambda |\xi|^2$$

für alle $\xi, x \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^{nm}$.

Die rechte Seite genügt der Wachstumsbedingung

$$(12) \quad |f^\alpha(x, z, p)| \leq a |p|^2, \quad 1 \leq \alpha \leq n,$$

mit reellem $a > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^n, p \in \mathbb{R}^{nm}$.

Für harmonische Abbildungen muß man das (lokale) Differentialgleichungssystem (4) in der Form

$$\Delta_M u^\alpha = - \Gamma_{\rho\gamma}^\alpha(u) g^{ij}(x) D_i u^\beta D_j u^\gamma, \quad 1 \leq \alpha \leq n,$$

betrachten.

Mit $a_{ij}(x, u, \nabla u) = \sqrt{\det g_{ij}(x)} g^{ij}(x)$ und

$$f^\alpha(x, u, \nabla u) = - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u) \sqrt{\det g_{ij}(x)} g^{ij}(x) D_i u^\beta D_j u^\gamma, \quad 1 \leq \alpha \leq n,$$

ergeben die Voraussetzungen (11) und (12) folgende restriktive Einschränkungen an die differentialgeometrische Struktur der Mannigfaltigkeiten M und N :

(11)' der Laplace-Beltrami-Operator Δ_M auf M muß ein gleichmäßig elliptischer Operator sein. Für den metrischen Tensor $g = (g_{ij})$ auf M heißt das: Es muß reelle Konstanten $\lambda' > \lambda' > 0$ geben mit

$$\lambda' |\xi|^2 \leq g_{ij}(x) \xi_i \xi_j \leq \lambda' |\xi|^2$$

für alle $\xi \in \mathbb{R}^n$, $x \in M$.

(12)' die Christoffelsymbole $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u)$, $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$, des riemannschen Zusammenhangs auf N müssen beschränkte Funktionen sein, d.h. es gibt reelle $a' > 0$ mit

$$|\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u)| \leq a' \quad \forall u \in N.$$

Mannigfaltigkeiten, deren metrischer Tensor g die Bedingung (11)' erfüllt, nennt S. Hildebrandt "simple manifolds" (vgl. S. Hildebrandt [27], S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman [30]), falls sie gleichzeitig eine globale Karte $\psi : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, also ein globales Koordinatensystem, haben.

Das folgende Beispiel zeigt, daß schon einfache, global parametrisierte 2-Flächen im $\mathbb{R}^3$ dieser strengen Uniformitätsbedingung (11)' nicht genügen.

Beispiel:

$M := \{x, y, x^2 - y^2 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Man betrachte $M = F(\mathbb{R}^2)$ mit $F(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$ als riemannsche Mannigfaltigkeit mit der durch F von der euklidischen Metrik im $\mathbb{R}^3$ induzierten Metrik, also mit dem metrischen Tensor

$$g = (g_{ij}(x, y)) = \begin{pmatrix} 1+4x^2 & -4xy \\ -4xy & 1+4y^2 \end{pmatrix}$$

Für die Eigenwerte der symmetrischen Matrix g gilt

$\lambda_{1,2}(g) = \frac{1}{2} \text{Sp}g \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\text{Sp}g)^2 - 4 \det g}$, man erhält $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 1+4(x^2+y^2)$ und damit für alle $\xi \in \mathbb{R}^2$:

$$|\xi|^2 \leq g_{ij}(x, y) \xi_i \xi_j \leq [1+4(x^2+y^2)] |\xi|^2.$$

Das ist nicht die in (11)' geforderte uniforme Abschätzbarkeit, denn $1+4(x^2+y^2) \rightarrow \infty$ mit $(x^2+y^2) \rightarrow \infty$.

Für spätere Überlegungen sei angemerkt, daß für die Gaußsche Krümmung K von M gilt:

$$K(x, y) = - \frac{4}{[1+4(x^2+y^2)]^2} < 0.$$

Ein differentialgeometrisches Kriterium (Bedingung an die Krümmung von M) dafür, daß eine Mannigfaltigkeit "simple" ist, enthält der folgende (vgl. auch S. Hildebrandt [27])

Satz (R.E. Greene, H. Wu): Sei M eine Mannigfaltigkeit mit Pol p (zur Def. vgl. R.E. Greene, H. Wu [22], S. 5), $\rho(x) := \text{dist}(x, p)$. Die nicht negativen, stetigen Funktionen $K, k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ seien definiert durch

$$-k(r) := \min\{0, \text{Radial-Krümmung in } x \in M \text{ mit } \rho(x) = r\}$$

$$K(r) := \max\{0, \text{Radial-Krümmung in } x \in M \text{ mit } \rho(x) = r\}$$

Es gelte $\int_0^\infty s k(s) ds < \infty$ und $\int_0^\infty s K(s) ds \leq 1$, dann ist M "simple manifold". Insbesondere gilt dies, wenn M vollständig, einfach zusammenhängend mit nicht positiver Schnittkrümmung K_s ist und ein Punkt $x_0 \in M$ existiert mit

$$K_s(x) \geq - \frac{A}{r(x)^2 (\log r(x))^{1+\varepsilon}} \text{ für } x \in M \text{ mit } r(x) = \text{dist}(x, x_0) > 1$$

und reelle Konstanten $A, \varepsilon > 0$.

Ein ähnlich globales, differentialgeometrisches Kriterium zur Herleitung von Schranken für die Christoffelsymbole der Bildmannigfaltigkeit N , so daß die Bedingung (12)' nachprüfbar ist, ist nicht bekannt.

Eine direkte Übertragung der Liouville-Sätze für quasilineare elliptische Differentialgleichungssysteme auf harmonische Abbildungen ist also nur unter starken Einschränkungen an die Urbild- und Bildmannigfaltigkeit möglich.

Jedoch erhalten S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman [30] durch Anwendung der von S. Hildebrandt und K.-O. Widman entwickelten Methoden zur Gewinnung von Hölderabschätzungen (Regularitätstheorie) folgenden Liouville-Satz ohne Voraussetzung (12)'.

Satz (S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman):

$u : M \rightarrow N$ sei eine harmonische Abbildung. M sei "simple manifold"; die Schnittkrümmung von N sei nach oben durch K beschränkt, $K > 0$.

$B_R(Q)$ sei eine geodätische Kugel in N mit Radius $R < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$, die den Schnittpunkt ihres Zentrums Q nicht trifft.

Für u gelte die Kleinheitsbedingung

$$(13) \quad u(M) \subseteq B_R(Q) \subseteq N, \quad R < \frac{\pi}{2\sqrt{K}},$$

dann ist u eine konstante Abbildung.

A. Tachikawa [62] kann unter der Zusatzvoraussetzung, daß u ein echtes, lokales Minimum des Energiefunktional E ist, die Kleinheitsbedingung (13) abschwächen.

Diese beiden Liouville-Sätze für harmonische Abbildungen verallgemeinern einen entsprechenden Satz von J. Moser [54], R.E. Greene, H. Wu [22] für harmonische Funktionen auf "simple manifolds". Unter ähnlichen Voraussetzungen beweisen R.E. Greene, H. Wu [22] einen Liouville-Satz für harmonische Funktionen auf Mannigfaltigkeiten mit Pol (zur Definition vgl. R.E. Greene, H. Wu [22], S.5).

Weitere Liouville-Sätze verschiedener Autoren unter wechselnden Bedingungen an die differentialgeometrische Struktur der Mannigfaltigkeiten M und N (Krümmung, Wachstum des Volumens geodätischer Kugeln, spezielle Metriken) und an das Verhalten der harmonischen Funktion bzw. Abbildung (beschränkt, einseitig beschränkt, Wachstumsbedingungen, Zugehörigkeit zu L^p , Wachstum der L^p -Norm, endliches Dirichlet-Integral bzw. endliche Energie, beschränkte Dilatation) sind im Anhang dieser Arbeit tabellarisch zusammengestellt.

Im Gegensatz zu S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman [30] sollen in dieser Arbeit Liouville-Sätze ohne spezielle Voraussetzungen an die "Kartographie" der Urbildmannigfaltigkeit M bewiesen werden.

M soll eine vollständige, einfach zusammenhängende, m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit sein. Wir verzichten insbesondere auf die Existenz einer globalen Karte, und wir lassen zu, daß der Laplace-Beltrami-Operator Δ_M auf M nicht gleichmäßig elliptisch ist.

Als Bedingung an die Bildmannigfaltigkeit N beschränken wir uns auf Vollständigkeit und Schranken für die Schnittkrümmung.

Dabei werden wir den Methoden von S.T. Yau [66], S.Y. Cheng [7] und H.I. Choi [9] folgend Abschätzungen für den Gradienten

bzw. die Energiedichte der harmonischen Funktion/Abbildung herleiten.

Die Autoren S.T. Yau, S.Y. Cheng und H.I. Choi setzen für die Urbildmännigfaltigkeit M stets voraus, daß

(14) die Ricci-Krümmung von M global nicht negativ ist.

Das folgende Beispiel zeigt, daß man nicht erwarten kann, S.T. Yaus Liouville-Satz auf riemannsche Mannigfaltigkeiten global negativer Ricci-Krümmung - sei die Ricci-Krümmung auch betragsmäßig klein - zu übertragen.

Beispiel: (ε -Poincaré-Halbebene)

Sei $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$, und der metrische Tensor g sei gegeben durch

$$g = (g_{ij}(x,y)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\varepsilon y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\varepsilon y^2} \end{pmatrix}.$$

Es gilt: $M \subseteq \mathbb{R}^2$ ist offen, $\text{id} : M \rightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$ ist eine globale Karte, und (M,g) ist eine vollständige, einfach zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

Für die Gaußsche Krümmung von M gilt

$$\begin{aligned} K = K(x,y) &= - \frac{1}{2\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial g_{11}}{\partial y} \right) \\ &= - \varepsilon. \end{aligned}$$

Für den Laplace-Beltrami-Operator von M gilt

$$\begin{aligned} \Delta_M &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \frac{\partial}{\partial x_i} (\sqrt{\det g} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}) \\ &= \varepsilon y^2 \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\varepsilon y^2} \varepsilon y^2 \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\varepsilon y^2} \varepsilon y^2 \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \epsilon y^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right] \\
 &= \epsilon y^2 \Delta,
 \end{aligned}$$

dabei ist Δ der gewöhnliche Laplace-Operator im $\mathbb{R}^2$.

Man erhält also:

Jede Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$, die auf der oberen Halbebene $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ harmonisch ist, d.h. $\Delta u = 0$ löst, ist aufgefaßt als Funktion auf der riemannschen Mannigfaltigkeit M (mittels der globalen Karte) harmonisch, also Lösung von $\Delta_M u = 0$.

Für den Ricci-Tensor auf M gilt

$$R = (R_{ij}) = K(g_{ij}) = -\epsilon(g_{ij}).$$

Sei e ein Einheitsvektor im Tangentialraum $T_{(x,y)}M$, also $\langle e, e \rangle = g_{ij}(x,y)e_i e_j = 1$, dann gilt für die Ricci-Krümmung bezüglich e :

$$K_R = R(e, e) = R_{ij}e_i e_j = -\epsilon g_{ij}e_i e_j = -\epsilon.$$

Der Ricci-Tensor ist also negativ definit, und die Ricci-Krümmung ist in jedem Punkt bezüglich jeder Richtung konstant $-\epsilon$.

Wir haben aber auf (M, g) folgenden

Satz:

Auf (M, g) existiert eine nicht konstante, beschränkte harmonische Funktion. Es gibt sogar unendlich viele solcher Funktionen. Die Ricci-Krümmung von M ist konstant $-\epsilon$.

Beweis:

Wegen $\Delta_M = \epsilon y^2 \Delta$ muß man nur eine auf $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ beschränkte Lösung von $\Delta u = 0$ finden.

Man identifiziere $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ mit $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$. Real- und Imaginärteil jeder auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ holomorphen Funktion lösen aufgefaßt als reelle Funktionen in den Variablen x und y die Gleichung $\Delta u = 0$.

Man betrachte also z.B. $u(x,y) = \text{Re } \frac{1}{z+i}$ mit $z = x+iy$; $\frac{1}{z+i}$ ist auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ holomorph, also gilt $\Delta u = 0$.

Es ist $u(x,y) = \frac{x}{x^2 + (y+1)^2}$, und wegen $y > 0$ also $(y+1)^2 > 1$ in M

gilt $|u(x,y)| \leq \frac{|x|}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2}$.

Damit ist u eine beschränkte Lösung von $\Delta_M u = 0$. Dies gilt ebenso für Real- und Imaginärteil jeder auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im } z > 0\}$ beschränkten, holomorphen Funktion.

Allgemeiner als dieses Beispiel zeigt, gilt (vgl. R.E. Greene, H. Wu [22], S. 116; A. Kasue [46], S. 27) der

Satz:

Sei M eine vollständige, einfach zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit Schnittkrümmung $\leq -K$ für eine reelle Konstante $K > 0$. M sei symmetrisch bezüglich einer (eingebetteten) Hyperfläche L , d.h. es gibt eine Isometrie $\phi : M \rightarrow M$ mit $\phi \neq \text{id}_M$, $\phi^2 = \text{id}_M$ und $\phi(x) = x \ \forall x \in L$. Dann gilt: Auf M gibt es eine nicht konstante, beschränkte harmonische Funktion.

Zusammenfassend kann man zur Gültigkeit von Liouville-Sätzen bezogen auf die Krümmungsvoraussetzungen an die Urbildmannigfaltigkeit M sagen:

Für eine vollständige, einfach zusammenhängende, nicht kompakte riemannsche Mannigfaltigkeit M

- gilt ein Liouville-Satz, falls

- die Ricci-Krümmung global nicht negativ ist (S.T. Yau [66], S.Y. Cheng [7], H.I. Choi [9])

- die Schnittkrümmung nicht positiv ist und asymptotisch schnell genug gegen 0 geht, denn dann ist M "simple manifold" (R.E. Greene, H. Wu [22], S. Hildebrandt [28], S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman [30])
- gilt kein Liouville-Satz, falls
 - die Krümmung (Ricci-Krümmung, Gaußsche Krümmung, Schnittkrümmung) global $\leq -\varepsilon$ ist. Dabei ist $\varepsilon > 0$ eine beliebig kleine reelle Konstante (Beispiel der ε -Poincaré-Halbebene in dieser Arbeit, R.E. Greene, H. Wu [22]).

Eine partielle Antwort auf die von H. Wu [63] formulierte Frage nach der Gültigkeit von Liouville-Sätzen für harmonische Abbildungen, deren Urbildmannigfaltigkeit Ricci-Krümmung mit wechselndem Vorzeichen hat, geben die in dieser Arbeit im fünften Kapitel bewiesenen Sätze. Dort wird vereinfacht gesagt verlangt, daß die Ricci-Krümmung der Urbildmannigfaltigkeit "weit draußen" nicht negativ ist; das heißt:

Innerhalb einer beschränkten Teilmenge der Urbildmannigfaltigkeit benötigen wir keine Voraussetzungen an das Vorzeichen der Ricci-Krümmung; auf Grund der Stetigkeit der Metrik und des Krümmungstensors haben wir, da die beschränkte Menge $\Omega \subseteq M$ relativ kompakt ist in M (vgl. Satz 2.1. (Hopf, Rinow), generell die Voraussetzung:

Die Ricci-Krümmung der Urbildmannigfaltigkeit M , $\text{Ric}(M)$, ist nach unten beschränkt, d.h. es gibt eine (eventuell negative) reelle Konstante R_M mit

$$\text{Ric}(M) \geq R_M.$$

2. Differentialgeometrische Grundlagen, invariante Theorie harmonischer Abbildungen, Weitzenböck-Formel

2.1. Differentialgeometrische Grundlagen

In diesem Abschnitt stellen wir zur Klärung der verwendeten Begriffe und der Bezeichnungsweise die durchgehend verwendeten differentialgeometrischen Sachverhalte dar.

Wir betrachten eine m-dimensionale C^∞ -Mannigfaltigkeit M mit Tangentialbündel TM und zugehöriger kanonischer Bündelprojektion $\pi : TM \rightarrow M$ ($\pi|_{T_x M} : T_x M \rightarrow M$ mit $\pi(v) = x$ für $v \in T_x M$). $F(M)$ bezeichne die Menge der C^∞ -Funktionen auf M .

Ein Vektorfeld v auf M ist ein C^∞ -Schnitt in TM , d.h. eine C^∞ -Abbildung $v : M \rightarrow TM$ mit $\pi \circ v = \text{id}_M$, also:

Für $x \in M$ ist $v(x) \in T_x M$, und die Zuordnung $x \rightarrow v(x)$ ist C^∞ . Eine riemannsche Metrik auf M ist ein C^∞ -Schnitt

$$g : M \rightarrow (TM \otimes TM)^*,$$

so daß für jedes $x \in M$ die Bilinearform

$$g(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$$

symmetrisch und positiv definit ist.

Für $v, w \in T_x M$ schreiben wir auch

$$\langle v, w \rangle_x := g(x)(v, w).$$

Sei $V(M)$ die Menge aller Vektorfelder auf M ; mit $v, w \in V(M)$ schreiben wir auch

$$g(v, w) = \langle v, w \rangle : M \rightarrow \mathbb{R}$$

für die Zuordnung $x \rightarrow g(x)(v(x), w(x)) = \langle v(x), w(x) \rangle_x$.

Den C^∞ -Schnitt g nennen wir auch metrischen Tensor von M .

In lokalen Koordinaten auf M wird die symmetrische, positiv definite Bilinearform $g(x)$ dargestellt durch die symmetrische, positiv definite $m \times m$ -Matrix $(g_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq m}$.

Die zugehörige inverse Matrix sei $(g^{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq m}$. Da g ein C^∞ -Schnitt ist, ist die Zuordnung $x \rightarrow g_{ij}(x)$ für alle $i, j \in \{1, \dots, m\}$ eine C^∞ -Funktion.

Die C^∞ -Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer riemannschen Metrik g auf M nennen wir riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) . Sei $a : M \rightarrow (TM \otimes TM)^*$ eine symmetrische Bilinearform auf M ; unter der Spur von a in M , $Sp_M a$, verstehen wir die Summe der m reellen Eigenwerte von a relativ zu g . In lokalen Koordinaten ist das die Summe der m reellen Wurzeln $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ der Gleichung $0 = \det(a_{ij} - \lambda g_{ij})$.

Man erhält in lokalen Koordinaten (vgl. Anhang, Hilfssatz 1)

$$Sp_M a = \sum_{i,j=1}^m g^{ij} a_{ji}.$$

Unter einem Basisfeld auf M verstehen wir m Vektorfelder $E_1, \dots, E_m \in V(M)$, so daß für jedes $x \in M$ $\{E_1(x), \dots, E_m(x)\} \subseteq T_x M$ eine Basis des Tangentialraumes $T_x M$ ist. Ein ON-Basisfeld auf M ist ein Basisfeld $\{E_1, \dots, E_m\}$ mit $g(E_i, E_j) = \langle E_i, E_j \rangle = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq m$.

Unter dem Levi-Civita-Zusammenhang (riemannschen Zusammenhang) auf M verstehen wir die Abbildung (zur Existenz und Eindeutigkeit vgl. S. Kobayashi, K. Nomizu [49], S. 158, Theorem 2.2.)

$$M_V : V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$$

mit folgenden Eigenschaften für $u, v, w \in V(M)$ und $f \in F(M)$

$$(15) \quad M_V(u, v+w) = M_V(u, v) + M_V(u, w)$$

$$(16) \quad M_V(u+v, w) = M_V(u, w) + M_V(v, w)$$

$$(17) \quad M_{\nabla}(u, fv) = u(f)v + f M_{\nabla}(u, v) \text{ mit } u(f) = df(u)$$

$$(18) \quad M_{\nabla}(fu, v) = f M_{\nabla}(u, v)$$

$$(19) \quad M_{\nabla}(u, v) - M_{\nabla}(v, u) - [u, v](f) = u(v(f)) - v(u(f))$$

$$(20) \quad u(\langle v, w \rangle) = \langle M_{\nabla}(u, v), w \rangle + \langle v, M_{\nabla}(u, w) \rangle.$$

Für $M_{\nabla}(u, v)$ schreiben wir $M_{\nabla u} v$, und wir nennen $M_{\nabla u} v$ die kovariante Ableitung von v nach u.

Auf Grund der Rechenregeln (15) - (18) reicht es, die Abbildung M_{∇} auf einem Basisfeld zu kennen. In lokalen Koordinaten hat man

$$(21) \quad M_{\nabla E_i}(x) E_j(x) = M_{\Gamma_{ij}}^k(x) E_k(x).$$

Die Funktionen $M_{\Gamma_{ij}}^k$ heißen Christoffel-Symbole 2. Art, sie sind in lokalen Koordinaten definiert durch

$$(22) \quad M_{\Gamma_{ij}}^k(x) = \frac{1}{2} \sum_{\ell=1}^m g^{k\ell}(x) \{D_j g_{\ell i}(x) + D_i g_{\ell j}(x) - D_{\ell} g_{ij}(x)\},$$

dabei steht D_j für die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j}$.

Aus der Symmetrie von $(g_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq m}$ folgt $M_{\Gamma_{ij}}^k(x) = M_{\Gamma_{ji}}^k(x)$. Als Verallgemeinerung des Begriffs Vektorfeld auf M benutzen wir Tensorfelder auf M .

Die Menge $\Gamma^{0,s}(M)$ der $(0,s)$ -Tensorfelder auf M besteht aus s -linearen C^{∞} -Schnitten

$$\alpha : M \rightarrow \underbrace{(TM \otimes TM \otimes \dots \otimes TM)^*}_{s\text{-Faktoren}},$$

d.h. für $x \in M$ ist $\alpha(x) : \underbrace{T_x^* M \times T_x^* M \times \dots \times T_x^* M}_{s\text{-Faktoren}} \rightarrow \mathbb{R}$ eine

s-lineare Abbildung; die Zuordnung $x \rightarrow \alpha(x)$ ist C^∞ .

Die Menge $\mathcal{T}^{r,0}(M)$ der $(r,0)$ -Tensorfelder auf M besteht aus r -linearen C^∞ -Schnitten

$$t : M \rightarrow \underbrace{(TM^* \otimes TM^* \otimes \dots \otimes TM^*)^*}_{r\text{-Faktoren}},$$

$$\text{d.h. f\"ur } x \in M \text{ ist } t(x) : \underbrace{T_x^* M^* \times T_x^* M^* \times \dots \times T_x^* M^*}_{r\text{-Faktoren}} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine r -lineare Abbildung; die Zuordnung $x \rightarrow t(x)$ ist C^∞ .

Die Menge $\mathcal{T}^{r,s}(M)$ der (r,s) -Tensorfelder auf M besteht aus $(r+s)$ -linearen C^∞ -Schnitten

$$\omega : M \rightarrow \underbrace{(TM^* \otimes \dots \otimes TM^*)^*}_{r\text{-Faktoren}} \otimes \underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{s\text{-Faktoren}},$$

$$\text{d.h. f\"ur } x \in M \text{ ist } \omega(x) : \underbrace{T_x^* M^* \times \dots \times T_x^* M^*}_{r\text{-Faktoren}} \times \underbrace{T_x M \times \dots \times T_x M}_{s\text{-Faktoren}} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine $(r+s)$ -lineare Abbildung; die Zuordnung $x \rightarrow \omega(x)$ ist C^∞ .

Als Spezialf\"alle hat man:

$$\mathcal{T}^{1,0}(M) = \{t : M \rightarrow (TM^*)^* \mid \text{f\"ur jedes } x \in M \text{ ist } t(x) \in (T_x^* M^*)^* = T_x M\}$$

$= V(M)$ ist die Menge der Vektorfelder auf M ;

$$\mathcal{T}^{0,1}(M) = \{\alpha : M \rightarrow TM^* \mid \text{f\"ur jedes } x \in M \text{ ist } \alpha(x) : T_x M \rightarrow \mathbb{R} \text{ eine Linearform}\}$$

ist die Menge der 1-Formen auf M ;
man setzt $\mathcal{T}^{0,0}(M) := F(M)$.

Mit Hilfe des riemannschen Zusammenhangs M_∇ definieren wir die kovariante Ableitung f\"ur Tensorfelder auf M .

Definition 2.1.:

Die kovariante Ableitung von Tensorfeldern auf M ist die Abbildung

$$M_{\nabla} : V(M) \times T^{r,s}(M) \rightarrow T^{r,s}(M)$$

definiert durch:

(23) Für $f \in T^{0,0}(M) = F(M)$ und $u \in V(M)$ ist

$$M_{\nabla u} f := u(f) = df(u)$$

(24) Für $v \in T^{1,0}(M) = V(M)$ und $u \in V(M)$ ist

$M_{\nabla u} v$ die über den riemannschen Zusammenhang auf M definierte kovariante Ableitung von v nach u .

(25) Für $\omega \in T^{r,s}(M)$, $(r,s) \neq (0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ und $u \in V(M)$ ist $M_{\nabla u} \omega$ definiert durch

$$\begin{aligned} M_{\nabla u} \omega(v_1, \dots, v_r, \alpha_1, \dots, \alpha_s) &= M_{\nabla u} [\omega(v_1, \dots, v_r, \alpha_1, \dots, \alpha_s)] \\ &- \sum_{i=1}^r \omega(v_1, \dots, M_{\nabla u} v_i, v_{i+1}, \dots, v_r, \alpha_1, \dots, \alpha_s) \\ &- \sum_{j=1}^s \omega(v_1, \dots, v_r, \alpha_1, \dots, M_{\nabla u} \alpha_j, \alpha_{j+1}, \dots, \alpha_s) \end{aligned}$$

für $v_i \in TM$, $1 \leq i \leq r$, und $\alpha_j \in TM^*$, $1 \leq j \leq s$.

(26) Für $\alpha \in T^{0,1}(M)$ und $u \in V(M)$ ist $M_{\nabla u} \alpha$ definiert durch

$$\begin{aligned} M_{\nabla u} \alpha(v) &= u(\alpha(v)) - \alpha(M_{\nabla u} v) \\ &= d(\alpha(v))(u) - \alpha(M_{\nabla u} v) \end{aligned}$$

für $v \in T(M)$.

Für den metrischen Tensor $g \in T^{0,2}(M)$ gilt auf Grund der Verträglichkeitsregeln (19), (20) für M_{∇} mit der riemannschen Struktur von M (vgl. M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet [1], S. 29):

$$(27) \quad {}^M \nabla_u g = 0 \quad \forall u \in V(M) .$$

Sei $\{E_1, \dots, E_m\}$ eine ON-Basis von T_x^M ; die Abbildung $i : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x^M$ sei definiert durch $i(y) = \sum_{j=1}^m y_j E_j$ für

$y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$. Sei $\exp_x : T_x^M \rightarrow M$ die Exponentialabbildung, und sei $\psi : B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow M$ definiert durch

$$\psi(y) = \exp_x \circ i(y) \quad \text{für } y \in B_\varepsilon(0) = \{z \in \mathbb{R}^m \mid |z| < \varepsilon\} \subseteq \mathbb{R}^m .$$

Setze $B_\varepsilon(x) := \psi(B_\varepsilon(0)) \subseteq M$. Auf Grund der Eigenschaften von $\exp_x$ gibt es zu jedem $x \in M$ ein $\varepsilon > 0$, so daß die Abbildung

$\psi : B_\varepsilon(0) \rightarrow B_\varepsilon(x)$ ein Diffeomorphismus ist (vgl. S. Kobayashi, K. Nomizu [49], Prop. 8.2., S. 147).

Wir nennen $\phi := \psi^{-1} : B_\varepsilon(x) \subseteq M \rightarrow B_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^m$ eine (riemannsche) Normalkarte um $x \in M$ und die zugehörigen lokalen Koordinaten (riemannsche) Normalkoordinaten um x . Der Punkt $x \in M$ hat die riemannschen Normalkoordinaten $\phi(x) = 0 \in \mathbb{R}^m$.

Wir verabreden die folgende Identifikation:

Ein Punkt $x \in M$ wird bezüglich einer festgelegten lokalen Karte ϕ stets mit seiner Darstellung $\phi(x)$ in lokalen Koordinaten identifiziert; wir schreiben dafür $x \hat{=} \phi(x)$.

Im Fall der riemannschen Normalkoordinaten um x haben wir also im Sinne dieser Identifikation $x \hat{=} \phi(x) = 0$.

Für die Komponenten des metrischen Tensors g und die Christoffel-Symbole gilt bezüglich der Normalkarte um $x \in M$:

$$(28) \quad \begin{aligned} g_{ij}(x) &:= g_{ij}(0) = \delta_{ij} , \quad 1 \leq i, j \leq m , \\ M_{ij}^k(x) &:= M_{ij}^k(0) = 0 , \quad 1 \leq i, j, k \leq m , \end{aligned}$$

also insbesondere

$${}^M \nabla_{E_i} E_j = 0 , \quad 1 \leq i, j \leq m .$$

Bevor wir kurz die Krümmungsgrößen auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit erläutern, soll noch eine Notation vereinbart werden

Definition 2.2.:

Sei M_{∇} die kovariante Ableitung von Tensorfeldern auf M und $\{E_1, \dots, E_m\}$ ein ON-Basisfeld auf M , dann ist

$$M_{\nabla_i} := M_{\nabla_{E_i}} : T^{r,s}(M) \rightarrow T^{r,s}(M), \quad 1 \leq i \leq m,$$

die i -te partielle kovariante Ableitung von Tensorfeldern auf M . Für $\omega \in T^{r,s}(M)$ ist $M_{\nabla_i} \omega$ die i -te partielle kovariante Ableitung von ω und $M_{\nabla_j}(M_{\nabla_i} \omega)$ die gemischte zweite partielle kovariante Ableitung von ω nach E_i und E_j ($1 \leq i, j \leq m$). Entsprechend sind induktiv höhere partielle kovariante Ableitungen $M_{\nabla_{i_1}}(\dots(M_{\nabla_{i_k}}(M_{\nabla_{i_1}} \omega)))$ von ω definiert.

Insbesondere erhalten wir für eine 1-Form $\omega \in T^{0,1}(M)$:

Bezüglich der zum ON-Basisfeld $\{E_1, \dots, E_m\}$ auf M dualen

Basis $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ mit $\theta_i \in T^{0,1}(M)$, $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq m$,

hat ω die Darstellung $\omega = \sum_{i=1}^m \omega_i \theta_i$ mit Komponentenfunktionen $\omega_i \in F(M)$.

Dann ist $M_{\nabla_j} \omega := \omega_{i,j} \theta_i \in T^{0,1}(M)$ mit

$$\omega_{k,j} = M_{\nabla_j} \omega(E_k) = D_j \omega_k - \omega_i M_{\Gamma_{jk}}^i, \quad D_j \omega_k := \frac{\partial \omega_k}{\partial x_j}.$$

Wir nennen $\omega_{k,j}$ die j -te partielle kovariante Ableitung der k -ten Komponente ω_k von ω .

Der Krümmungstensor der riemannschen Mannigfaltigkeit ist das Tensorfeld $M_R \in T^{0,4}(M)$ definiert durch

$$M_R(v_1, v_2, v_3, v_4) = g(M_R(v_3, v_4) v_2, v_1) \text{ für } v_i \in V(M), 1 \leq i \leq 4,$$

mit der 3-linearen Abbildung $M_R : V(M) \times V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$, die definiert ist durch

$$(29) \quad M_R(u, v)w := M_{\nabla u} M_{\nabla v} w - M_{\nabla v} M_{\nabla u} w - M_{\nabla [u, v]} w$$

für $u, v, w \in V(M)$.

Bezüglich eines Basisfeldes erhalten wir die Darstellung

$$(30) \quad M_R(E_i, E_j)E_k = \sum_{\ell=1}^m M_{ijk}^{\ell} E_{\ell}, \quad 1 \leq i, j, k \leq m,$$

mit $M_{ijk}^{\ell} \in F(M)$. In lokalen Koordinaten hat man

$$(31) \quad M_{ijk}^{\ell} = D_i(M_{\Gamma jk}^{\ell}) - D_j(M_{\Gamma ik}^{\ell}) + \sum_{r=1}^m (M_{\Gamma ir}^{\ell} M_{\Gamma jk}^r - M_{\Gamma jr}^{\ell} M_{\Gamma ik}^r).$$

Die Darstellung des Krümmungstensors M_R bezüglich eines Basisfeldes ist in lokalen Koordinaten

$$M_R = \sum_{i, j, k, n=1}^m M_{Rnijk} \theta_n \otimes \theta_i \otimes \theta_j \otimes \theta_k$$

dabei ist $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ die duale Basis zu $\{E_1, \dots, E_m\}$ und

$$(32) \quad M_{Rnijk} := \sum_{\ell=1}^m g_{n\ell} M_{ijk}^{\ell}.$$

Eine Zusammenstellung der Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors ist im Anhang (vgl. Hilfssatz 2) enthalten.

Der Ricci-Tensor M_{Ric} der riemannschen Mannigfaltigkeit M ist definiert durch

$$(33) \quad M_{\text{Ric}}(v, w) := \text{Sp}_M(u \rightarrow M_R(u, v)w)$$

für $u, v, w \in V(M)$.

Es gilt (vgl. Anhang, Hilfssatz 3): ${}^M\text{Ric} \in T^{0,2}(M)$ ist ein symmetrischer Tensor. Als lokale Darstellung bezüglich eines Basisfeldes erhalten wir

$$(34) \quad {}^M\text{Ric}_{ij} := {}^M\text{Ric}(E_i, E_j) = g^{\ell k} {}^M R_{kij}^{\ell},$$

und auf Grund der Symmetrieeigenschaften gilt

$$(35) \quad g^{\ell k} {}^M R_{\ell ik}^s = - {}^M\text{Ric}_{si} = - {}^M\text{Ric}_{is}.$$

Sei $v \in T_x M$ mit $\|v\|^2 := g(x)(v, v) = \langle v, v \rangle_x$, dann ist

$$(36) \quad \text{ric}_x(v) := \frac{1}{\|v\|^2} {}^M\text{Ric}(x)(v, v)$$

die Ricci-Krümmung im Punkt $x \in M$ in Richtung von v .

Definition 2.3.:

Die riemannsche Mannigfaltigkeit M hat nicht negative Ricci-Krümmung, falls

$$\text{ric}_x(v) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in M, v \in T_x M$$

gilt. Das ist äquivalent dazu, daß der Ricci-Tensor ${}^M\text{Ric}$ positiv semidefinit ist. Die Ricci-Krümmung von M ist größer (bzw. kleiner) als $c \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$\text{ric}_x(v) \geq (<) c \quad \text{für alle } x \in M, v \in T_x M.$$

Als letzte für uns relevante Krümmungsgröße definieren wir die Schnittkrümmung $S_M(x)$ von M im Punkt $x \in M$:

Für $u, v \in T_x M$ mit $g(x)(u, v) = \langle u, v \rangle_x = 0$ ist

$$\begin{aligned} (37) \quad S_M(x)(u, v) &:= \frac{1}{\|u\|^2 \|v\|^2} {}^M R(x)(u, v, u, v) \\ &= \frac{1}{\|u\|^2 \|v\|^2} g(x)({}^M R(x)(u, v)v, u) \end{aligned}$$

die Schnittkrümmung von M in $x \in M$ bezüglich der orthogonalen Tangentialvektoren $u, v \in T_x M$.

Bezüglich eines Basisfeldes erhält man in lokalen Koordinaten mit $u = u_i E_i$, $v = v_j E_j$; $\langle u, v \rangle_x = 0$:

$$\begin{aligned} S_M(x)(u, v) &= M_{R_{sijk}}(x) u_i v_j v_k u_s \frac{1}{\|u\|^2 \|v\|^2} \\ &= g_{sl}(x) M_{R_{sijk}}^l(x) u_i v_j v_k u_s \frac{1}{\|u\|^2 \|v\|^2} . \end{aligned}$$

Definition 2.4.:

Die riemannsche Mannigfaltigkeit M hat nicht positive Schnittkrümmung, falls gilt

$$S_M(x)(u, v) \leq 0 \text{ für alle } x \in M \text{ und alle } u, v \in T_x M \text{ mit } \langle u, v \rangle_x = 0$$

Die Schnittkrümmung von M ist größer (bzw. kleiner) als $c \in \mathbb{R}$, falls gilt

$$\begin{aligned} S_M(x)(u, v) \geq (<) c \text{ für alle } x \in M \text{ und alle } u, v \in T_x M \\ \text{mit } \langle u, v \rangle_x = 0. \end{aligned}$$

Im folgenden werden Grundtatsachen über die Abstandsfunktion und metrische Eigenschaften riemannscher Mannigfaltigkeiten aufgelistet.

Die Abstandsfunktion

$$\text{dist}_M : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$$

ist definiert durch : Für $x, y \in M$ ist $\text{dist}_M(x, y)$ das Infimum der Längen aller stückweise C^∞ -Kurven in M mit Anfangspunkt x und Endpunkt y .

Die Abbildung dist_M ist stetig; sie definiert eine Metrik auf M (vgl. D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 156).

Diese Metrik auf M induziert eine zur ursprünglichen Topologie der Mannigfaltigkeit äquivalente Topologie (vgl. S. Kobayashi, K. Nomizu [49], Prop. 3.5., S. 166). Die metrischen Eigenschaften einer zusammenhängenden riemannschen Mannigfaltigkeit charakterisiert der

Satz 2.1. (Hopf, Rinow):

Sei M eine zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion dist_M und Levi-Civita-Zusammenhang M_V , dann gilt:

(1) Die folgenden Aussagen sind äquivalent

(1.1.) M ist ein vollständiger metrischer Raum bezüglich der Metrik dist_M ,

(1.2.) M ist eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, d.h. jede Geodätische in M kann zu einer über ganz $\mathbb{R}$ definierten Geodätischen in M erweitert werden,

(1.3.) für jeden Punkt $x \in M$ ist die Exponentialabbildung $\exp_x$ auf ganz $T_x M$ definiert,

(1.4.) jede bezüglich dist_M beschränkte Menge $\Omega \subseteq M$ ist relativ kompakt, d.h. $\bar{\Omega} \subseteq M$ ist kompakt.

(2) Jede der vier Aussagen (1.1.) bis (1.4.) impliziert die folgende Aussage:

Je zwei Punkte $x, y \in M$ lassen sich in M durch eine Geodätische der Länge $\text{dist}_M(x, y)$ verbinden (minimierende Geodätische).

Beweis: D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 166;
S. Kobayashi, K. Nomizu [49], Theorem 4.1., 4.2., S. 172.

Zur Vorbereitung der Konstruktionen und Abschätzungen im dritten Kapitel der Arbeit benötigen wir noch weitere differentialgeometrische Begriffe.

$c : I \rightarrow M$ sei eine Geodätische in $M(I \subseteq \mathbb{R} \text{ Intervall})$,
 $v : I \rightarrow TM$ heißt Vektorfeld längs c , wenn $\pi \circ v = c$ gilt
 mit der kanonischen Bündelprojektion $\pi : TM \rightarrow M$.

$V_c(M)$ bezeichne die Menge aller Vektorfelder längs c auf M .
 $\dot{c}$ bezeichne das Tangentenvektorfeld von c in M also
 $\dot{c}(t) := c_* \left(\frac{d}{dt} \right)$, d.h. für $f \in F(M) : \dot{c}(t_0)(f) = \frac{d}{dt}(f \circ c)(t_0)$;
 es gilt $\dot{c} \in V_c(M)$ also insbesondere $\dot{c}(t) \in T_{c(t)}M$, $t \in I$.

Für ein Vektorfeld $v \in V(M)$ setzen wir

$$v' := {}^M \nabla_{\dot{c}} v \text{ und } v'' := {}^M \nabla_{\dot{c}} v' = {}^M \nabla_{\dot{c}} ({}^M \nabla_{\dot{c}} v) .$$

Definition 2.5.:

$c : I \rightarrow M$ sei Geodätische in M . Ein Vektorfeld $v \in V_c(M)$ heißt
Jacobifeld längs c , wenn gilt

$$(38) \quad v'' + {}^M R(v, \dot{c}) \dot{c} = 0 .$$

Lemma 2.1.:

$c : I \rightarrow M$ sei Geodätische in M ; $t_0 \in I$ und $u_1, u_2 \in T_{c(t_0)}M$.
 Dann existiert genau ein Jacobifeld v längs c mit
 $v(t_0) = u_1$ und $v'(t_0) = u_2$.

Beweis: D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 128.

Definition 2.6.:

$c : I \rightarrow M$ sei Geodätische in M .
 $t_0, t_1 \in I$ heißen konjugiert bezüglich c , wenn es ein nicht
 identisch verschwindendes Jacobifeld v längs c mit $v(t_0) = 0$
 und $v(t_1) = 0$ gibt. Sei $I = [\alpha, \beta]$ und $x = c(\alpha)$; $t \in (\alpha, \beta]$
 heißt konjugiert längs c , wenn α, t konjugiert bezüglich c
 sind.

Wenn t konjugiert längs c ist, heißt $c(t)$ konjugierter
 Punkt zu $x = c(\alpha)$ längs c .

Sei $c : [0, \beta] \rightarrow M$ Geodätische mit $x = c(0)$, $v = \dot{c}(0)$ also $c(t) = \exp_x(tv)$, dann gilt (vgl. D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 133):

$t_1 \in (0, \beta]$ ist genau dann konjugiert längs c , also $c(t_1) \in M$ konjugierter Punkt zu $x \in M$, wenn $u := t_1 v \in T_x M$ kritischer Punkt von $\exp_x$ ist.

Definition 2.7. (vgl. S. Kobayashi, K. Nomizu [50], S. 96):

Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, $x_0 \in M$ und $c : [0, \infty) \rightarrow M$ normale (d.h. nach Bogenlänge parametrisierte) Geodätische in M mit $x_0 = c(0)$. Setze

$$A := \{s > 0 \mid c|_{[0, s]} \text{ ist minimierende Geodätische von } x_0 = c(0) \text{ nach } x_s = c(s)\}.$$

Es ist entweder $A = (0, \infty)$ oder $A = (0, r]$ für ein $r > 0$.

Falls $A = (0, r]$ ist, heißt $x_r = c(r)$ Schnitt-Punkt (cut point) von x_0 längs c .

Satz 2.2.:

Sei M vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit.

x sei Schnitt-Punkt (cut point) von x_0 längs der Geodätischen c . Dann gilt wenigstens eine der folgenden beiden Aussagen:

- (1) x ist der erste konjugierte Punkt zu x_0 längs c .
- (2) Es gibt mindestens zwei minimierende Geodätische von x_0 nach x .

Beweis: S. Kobayashi, K. Nomizu [50], Theorem 7.1., S. 97.

Korollar:

Wenn $x_r = c(r)$ Schnitt-Punkt von $x_0 = c(0)$ längs c ist, dann ist x_0 Schnitt-Punkt von x_r längs $-c$.

Beweis: S. Kobayashi, K. Nomizu [50], Cor. 7.2., S. 98.

Sei S_x die Einheitsphäre in $T_x M$, dann definieren wir

$\mu : S_x \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ wie folgt:

Zu $w \in S_x$ sei $c_w(t) = \exp_x(tw)$, $t \in [0, \infty)$, die Geodätische mit Anfangspunkt $x = c_w(0)$ und Anfangsrichtung $w = \dot{c}_w(0)$. Wenn $x_r = c_w(r)$ ein Schnitt-Punkt zu x längs c_w ist, dann setzen wir $\mu(w) = r$. Wenn kein Schnitt-Punkt zu x längs c_w existiert, setzen wir $\mu(w) = \infty$.

Satz 2.3.:

Die Abbildung $\mu : S_x \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ ist stetig.

Beweis: S. Kobayashi, K. Nomizu [50], Theorem 7.3., S. 98;
D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer, [23], S. 169.

Definition 2.8. (vgl. S. Kobayashi, K. Nomizu [50], S. 100,
D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer
[23], S. 169):

Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, $x_0 \in M$.
 $CT(x_0) := \{ \mu(w) \mid w \in S_{x_0} \text{ mit } \mu(w) < \infty \} \subseteq T_{x_0} M$

heißt Schnittort (cut locus) von x_0 in $T_{x_0} M$.

$C(x_0) := \exp_{x_0}(CT(x_0)) = \{x \in M \mid x \text{ ist Schnitt-Punkt zu } x_0 \text{ längs irgendeiner Geodätischen } c \text{ in } M \text{ mit Anfangspunkt } x_0\}$

heißt Schnittort (cut locus) von x_0 in M .

Satz 2.4.:

Sei $E(x_0) := \{ tw \mid 0 < t < \mu(w), w \in S_{x_0} \} \subseteq T_{x_0} M$, dann gilt:

- (1) $E(x_0)$ ist offen in $T_{x_0} M$,
- (2) $\exp_{x_0}$ bildet $E(x_0)$ diffeomorph auf eine offene Teilmenge von M ab,

(3) M ist die disjunkte Vereinigung von $\exp_{x_0}(E(x_0))$ und $C(x_0)$, also

$$M = \exp_{x_0}(E(x_0)) \cup C(x_0), \exp_{x_0}(E(x_0)) \cap C(x_0) = \emptyset.$$

Beweis: S. Kobayashi, K. Nomizu [50], Theorem 7.4., S. 100.

Insbesondere besagt Satz 2.4. (3), daß $\exp_{x_0}(E(x_0))$ der maximale Definitionsbereich für eine riemannsche Normalkarte um $x_0 \in M$ ist.

2.2. Invariante Theorie harmonischer Abbildungen

In diesem Abschnitt wird eine koordinatenunabhängige Beschreibung des Spannungsfelds von $u : M \rightarrow N$ ohne Rückgriff auf das Energiefunktional gegeben. Dazu wird der Begriff der kovarianten Ableitungen von u eingeführt; es werden Darstellungen der kovarianten Ableitungen bezüglich lokaler Koordinaten und Vertauschungsregeln für kovariante Ableitungen hergeleitet. Diese werden im Abschnitt 2.3. zur Herleitung der Weitzenböck-Formel benötigt.

Wir betrachten die m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit M mit metrischem Tensor g , Basisfeld

$\{E_1, \dots, E_m\} = \{E_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ von $V(M)$ und zugehöriger dualer Basis $\{\theta_1, \dots, \theta_m\} = \{\theta_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ von $T^{0,1}(M)$. M_V sei der Levi-Civita-Zusammenhang auf M . In lokalen Koordinaten haben wir die Darstellungen

$$g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}, \quad M_V E_i E_j = M_{\Gamma_{ij}}^k E_k.$$

N sei eine n -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit metrischem Tensor γ , Basisfeld $\{e_1, \dots, e_n\} = \{e_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq n\}$ von $V(N)$ und zugehöriger dualer Basis $\{\omega_1, \dots, \omega_n\} = \{\omega_\alpha \mid 1 \leq \alpha \leq n\}$ von $T^{0,1}(N)$. N_V sei der Levi-Civita-Zusammenhang auf N . In lokalen Koordinaten gilt

$$\gamma = (\gamma_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}, \quad N_V e_\alpha e_\beta = N_{\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma e_\gamma.$$

Es gelte die Einsteinsche Summationskonvention, d.h. über doppelt auftretende lateinische Indizes wird von 1 bis m summiert, und über doppelt auftretende griechische Indizes wird von 1 bis n summiert. Sei $u : M \rightarrow N$ eine C^∞ -Abbildung.

Neben den Tangentialbündeln TM und TN betrachten wir das Bündel $W = u^*(TN)$ über M mit den n-dimensionalen Fasern $W_x = T_{u(x)}N$; der Totalraum ist also

$$W = \{ (x, e) \mid x \in M, e \in \pi_N^{-1}(u(x)) = T_{u(x)}N \}.$$

Auf W definieren wir einen metrischen Tensor a über seine Darstellung in lokalen Koordinaten:

$$a = (a_{\alpha\beta}(x))_{1 \leq \alpha, \beta \leq n} := (\gamma_{\alpha\beta}(u(x)))_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}.$$

Als W-wertige 1-Formen über M bezeichnen wir die Menge

$$\mathcal{T}^{0,1}(M, W) := \{ \omega = \omega_i^\alpha \theta_i e_\alpha \mid \omega_i^\alpha \in F(M), 1 \leq i \leq m, 1 \leq \alpha \leq n \}$$

dabei ist $\omega^\alpha := \omega_i^\alpha \theta_i \in \mathcal{T}^{0,1}(M)$, $1 \leq \alpha \leq n$, eine 1-Form über M .

Das Differential du der Abbildung $u : M \rightarrow N$ ist die W-wertige 1-Form

$$(39) \quad du := u_i^\alpha \theta_i e_\alpha \in \mathcal{T}^{0,1}(M, W)$$

mit

$$(40) \quad u_i^\alpha = D_i u^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x_i}.$$

Wir haben also speziell $(du)^\alpha = u_i^\alpha \theta_i$ und $(du)_i^\alpha = u_i^\alpha$.

Wir definieren einen linearen Zusammenhang (kovariante Ableitung)

$$(41) \quad \overset{W}{\nabla} : \mathcal{V}(M) \times \mathcal{T}^{0,1}(M, W) \rightarrow \mathcal{T}^{0,1}(M, W)$$

auf M bezüglich W :

$$(42) \quad {}^W\nabla_{E_i} \omega(E_j) := [{}^M\nabla_{E_i} \omega^\alpha(E_j) + {}^W L_{\beta i}^\alpha \omega^\beta(E_j)] e_\alpha$$

für $1 \leq i, j \leq m$, $\omega \in T^{0,1}(M, W)$ mit

$$(43) \quad {}^W L_{\beta i}^\alpha := {}^N \Gamma_{\beta \gamma}^\alpha u_\gamma^i.$$

Wir haben also

$$(44) \quad {}^W \nabla \omega = [{}^M \nabla \omega^\alpha + {}^W L_{\beta i}^\alpha \theta_i \omega^\beta] e_\alpha.$$

Es gilt (vgl. A. Lichnerowicz [51], S. 351/352):

${}^W \nabla a = 0$, d.h. der Zusammenhang ${}^W \nabla$ ist mit der riemannschen Struktur auf W verträglich.

Definition 2.9.:

Sei ${}^W \nabla$ die oben definierte kovariante Ableitung auf M bezüglich W . Für die kovarianten Ableitungen von $\omega \in T^{0,1}(M, W)$ nach dem i -ten Basisfeld schreiben wir

$$(45) \quad {}^W \nabla_i \omega := {}^W \nabla_{E_i} \omega, \quad 1 \leq i \leq m.$$

Für die kovarianten Ableitungen des Differentials du gilt

Lemma 2.2.:

${}^W \nabla$ sei die kovariante Ableitung auf M bezüglich W , und $du \in T^{0,1}(M, W)$ sei das Differential der Abbildung $u : M \rightarrow N$, $u \in C^k(M, N)$, $k \geq 3$, dann gilt:

$$(1) \quad {}^W \nabla_i (du) = \{ D_i D_j u^\gamma - {}^M \Gamma_{ij}^k u_k^\gamma + {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u_i^\alpha u_j^\beta \} \theta_j e_\gamma$$

also

$${}^W \nabla (du) = \{ D_i D_j u^\gamma - {}^M \Gamma_{ij}^k u_k^\gamma + {}^N \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma u_i^\alpha u_j^\beta \} \theta_i \otimes \theta_j e_\gamma$$

$$\begin{aligned}
 (2) \quad w_{\nabla k} (w_{\nabla i} (du)) &= \{ D_k D_i D_j u^\gamma - M_{\Gamma ij}^\ell u_{\ell k}^\gamma - M_{\Gamma kj}^\ell u_{\ell i}^\gamma \\
 &+ N_{\Gamma \alpha \beta}^\gamma u_{ik}^\beta u_j^\alpha + N_{\Gamma \alpha \beta}^\gamma u_i^\beta u_{jk}^\alpha + N_{\Gamma \beta \nu}^\gamma u_k^\nu u_{ji}^\beta \\
 &- M_{\Gamma kj}^\ell N_{\Gamma \alpha \nu}^\gamma u_i^\nu u_\ell^\alpha - M_{\Gamma ij}^\ell N_{\Gamma \alpha \nu}^\gamma u_k^\nu u_\ell^\alpha \\
 &- D_k (M_{\Gamma ij}^\ell) u_\ell^\gamma + M_{\Gamma kj}^n M_{\Gamma ni}^\ell u_\ell^\gamma \\
 &+ D_\tau (N_{\Gamma \alpha \beta}^\gamma) u_k^\tau u_i^\beta u_j^\alpha + N_{\Gamma \mu \tau}^\gamma N_{\Gamma \alpha \beta}^\mu u_k^\tau u_i^\beta u_j^\alpha \} \theta_j e_\gamma \\
 &=: u_{,j,i,k}^\gamma \theta_j e_\gamma
 \end{aligned}$$

also

$$w_{\nabla} (w_{\nabla i} (du)) = u_{,j,i,k}^\gamma \theta_k \otimes \theta_j e_\gamma$$

$$w_{\nabla} (w_{\nabla} (du)) = u_{,j,i,k}^\gamma \theta_k \otimes \theta_i \otimes \theta_j e_\gamma$$

Dabei ist $u_{ij}^\alpha := D_i D_j u^\alpha$ für $1 \leq i, j \leq m$, $1 \leq \alpha \leq n$.

Beweis: Anhang, Hilfssatz 4

Bemerkung:

Die kovarianten Ableitungen $w_{\nabla}(du)$ und $w_{\nabla}(w_{\nabla}(du))$ sind über den linearen Zusammenhang w_{∇} auf M bezüglich W koordinatenunabhängig definiert.

Die Gleichungen unter (1) und (2) in Lemma 2.2. geben eine lokale Darstellung bezüglich der betrachteten lokalen Karte und lokaler Basisfelder an.

Definition 2.10. (kovariante Ableitungen von u):

Sei $u \in C^r(M, N)$ mit $r \geq 2$ bzw. $r \geq 3$ und w_{∇} die kovariante Ableitung auf M bezüglich $W = u^*(TN)$.

Dann definieren wir für $1 \leq \gamma \leq n$

(1) die erste kovariante Ableitung von u^γ in Richtung j als

$$u_{,j}^\gamma := u_j^\gamma = D_j u^\gamma = \frac{\partial u^\gamma}{\partial x_j} ;$$

(2) die zweite kovariante Ableitung von u^γ in Richtung j, i als

$$u_{,j,i}^\gamma := \{ u_{ji}^\gamma - M_{ji}^k u_k^\gamma + N_{\alpha\beta}^\gamma u_i^\alpha u_j^\beta \}$$

$$\text{mit } u_{ji}^\gamma = D_i D_j u^\gamma ;$$

(3) die dritten kovarianten Ableitungen von u^γ in Richtung j, i, k als

$$\begin{aligned} u_{,j,i,k}^\gamma := & \{ u_{jik}^\gamma - M_{ij}^\ell u_{\ell k}^\gamma - M_{kj}^\ell u_{\ell i}^\gamma + N_{\alpha\beta}^\gamma u_{ik}^\beta u_j^\alpha + \\ & N_{\alpha\beta}^\gamma u_i^\beta u_{jk}^\alpha + N_{\beta\gamma}^\nu u_k^\nu u_{ji}^\beta - M_{kj}^\ell N_{\alpha\nu}^\gamma u_i^\nu u_\ell^\alpha \\ & - M_{ij}^\ell N_{\alpha\nu}^\gamma u_k^\nu u_\ell^\alpha - D_k (M_{ij}^\ell) u_\ell^\gamma + M_{kj}^n M_{ni}^\ell u_\ell^\gamma \\ & + D_\tau (N_{\alpha\beta}^\gamma) u_k^\tau u_i^\beta u_j^\alpha + N_{\mu\tau}^\gamma N_{\alpha\beta}^\mu u_k^\tau u_i^\beta u_j^\alpha \} \end{aligned}$$

$$\text{mit } u_{jik}^\gamma = D_k D_i D_j u^\gamma .$$

Der folgende Satz enthält Regeln zur Vertauschung der Ableitungsreihenfolge bei der Berechnung kovarianter Ableitungen von u .

Satz 2.5.:

Sei $u \in C^r(M, N)$ dann gilt für die kovarianten Ableitungen von u^γ , $1 \leq \gamma \leq n$:

(1) mit $r \geq 2$: $u_{,i,j}^\gamma = u_{,j,i}^\gamma$, $1 \leq i, j \leq m$;

(2) mit $r \geq 3$:

$$u_{,j,i',k}^{\gamma} - u_{,j',k,i}^{\gamma} = u_{\ell}^{\gamma M} R_{ikj}^{\ell} + N_{\tau\beta\alpha}^{\gamma} u_k^{\tau} u_i^{\beta} u_j^{\alpha}$$

$$1 \leq i, j, k \leq m,$$

dabei sind M_{ikj}^{ℓ} und $N_{\tau\beta\alpha}^{\gamma}$ die Komponentenfunktionen der in Abschnitt 2.1. eingeführten Krümmungsgrößen auf M bzw. N .

Beweis: Anhang, Hilfssatz 5

Bemerkung:

Satz 2.5. zeigt, daß die zweiten kovarianten Ableitungen von $u \in C^2(M, N)$ genau wie die gewöhnlichen zweiten partiellen Ableitungen von C^2 -Abbildungen symmetrisch sind.

Dagegen wird beim Vertauschen der dritten kovarianten Ableitungen der Einfluß der Krümmung der Mannigfaltigkeiten M und N bemerkbar. Nur für "flache" Mannigfaltigkeiten (etwa $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Metrik) gilt in diesem Fall $u_{,j,i',k}^{\gamma} = u_{,j',k,i}^{\gamma}$. Dieser Einfluß der Krümmung auf die kovarianten Ableitungen ist letztlich dafür verantwortlich, daß Voraussetzungen an die Krümmung für den Beweis von Liouville-Sätzen notwendig sind.

Das folgende Lemma zeigt die Beziehung zwischen den kovarianten Ableitungen und dem Spannungsfeld von u .

Lemma 2.3.:

Sei $u \in C^2(M, N)$, $W = u^*(TN)$ und ${}^W\nabla$ die kovariante Ableitung auf M bezüglich W , dann gilt für das Spannungsfeld $\tau(u)$ von u :

$$(1) \quad \tau(u) = \text{Sp}_M({}^W\nabla(du))$$

also

$$(2) \quad \tau(u)^{\gamma} = \text{Sp}_M({}^W\nabla(du)^{\gamma}) \quad , \quad 1 \leq \gamma \leq n.$$

Insbesondere ist also $u \in C^2(M, N)$ eine harmonische Ableitung, wenn gilt (in lokalen Koordinaten):

$$(3) \quad g^{ji} u_{j,i}^\gamma = g^{ji} \{ u_{ji}^\gamma - M_{ji}^k u_k^\gamma + N_{\alpha\beta}^\gamma u_i^\alpha u_j^\beta \} = 0, \quad 1 \leq \gamma \leq n.$$

Beweis:

Nach (6) aus Abschnitt 1 dieser Arbeit gilt

$$\tau(u)^\gamma = \Delta_M u^\gamma + N_{\alpha\beta}^\gamma g^{ji} u_i^\alpha u_j^\beta, \quad 1 \leq \gamma \leq n,$$

nach Hilfssatz 6 im Anhang hat man

$$\Delta_M u^\gamma = g^{ji} \{ u_{ji}^\gamma - M_{ji}^k u_k^\gamma \}.$$

Zusammen mit Lemma 2.2. (1) und Definition 2.10. (2) erhalten wir

$$w_\nabla(du) = u_{j,i}^\gamma \theta_i \otimes \theta_j e_\gamma$$

$$Sp_M(w_\nabla(du)^\gamma) = g^{ji} u_{j,i}^\gamma = g^{ji} \{ u_{ji}^\gamma - M_{ji}^k u_k^\gamma + N_{\alpha\beta}^\gamma u_i^\alpha u_j^\beta \} = \tau(u)^\gamma,$$

das ist gerade (2), und (1) erhalten wir wegen

$$\begin{aligned} \tau(u) &= (\tau(u)^1, \dots, \tau(u)^n) = (Sp_M(w_\nabla(du)^1), \dots, Sp_M(w_\nabla(du)^n)) \\ &= Sp_M(w_\nabla(du)). \end{aligned}$$

$u \in C^2(M, N)$ ist harmonisch, falls $\tau(u) = 0$ also $\tau(u)^\gamma = 0, 1 \leq \gamma \leq n$ ist. Damit folgt (3) aus (2).

Korollar:

Insbesondere gilt für $u \in C^2(M)$

$$(46) \quad \Delta_M u = g^{ji} u_{j,i} = g^{ji} \{ u_{ji} - M_{ji}^k u_k \};$$

$u \in C^2(M)$ ist also eine harmonische Funktion falls

$$g^{ji} u_{,j,i} = 0 \quad \text{gilt.}$$

Beweis: Lemma 2.3. für den Spezialfall $N = R$ mit euklidischer Metrik.

Bemerkung:

(1) Wählt man riemannsche Normalkoordinaten um $x \in M$ und ON-Basisfelder $\{E_1, \dots, E_m\}$, dann gilt

$$\Delta_M u(x) = \sum_{i=1}^m u_{ii}(x), \text{ denn } g^{ji}(x) = \delta_{ji} \text{ und } \Gamma_{ji}^k(x) = 0 \text{ für}$$

$$1 \leq i, j, k \leq m.$$

(2) Definiert man für $du \in T^{0,1}(M, W)$

$$\langle du, du \rangle_N := \gamma_{\alpha\beta}(u(x)) u_i^\alpha u_j^\beta \theta_i \otimes \theta_j \in T^{0,2}(M),$$

dann erhält man für die Energiedichte $e(u)$

$$(47) \quad e(u) = \frac{1}{2} \operatorname{Sp}_M \langle du, du \rangle_N = \frac{1}{2} g^{ij} \gamma_{\alpha\beta}(u) u_i^\alpha u_j^\beta.$$

2.3. Die Weitzenböck-Formel

Zum Beweis der Liouville-Sätze werden punktweise Abschätzungen für $e(u)$ benötigt. Dazu werden Extremaleigenschaften von Hilfsfunktionen, die $e(u)$ als Faktor enthalten, ausgenutzt. Zu diesem Zweck müssen wir $\Delta_M e(u)$ berechnen und letztlich abschätzen; dazu dient die in diesem Abschnitt dargestellte Weitzenböck-Formel (Bocher-Typ-Formel) für $\Delta_M e(u)$ (vgl. J. Eells, J.H. Sampson [11], S. 129; J. Eells, L. Lemaire [12], S. 12).

Neben den Vertauschungsregeln für kovariante Ableitungen nutzen wir dabei die Tatsache aus, daß die kovarianten Ableitungen der metrischen Tensoren verschwinden (vgl. Abschnitt 2.1., (27);

Abschnitt 2.2., vor Definition 2.9.).

Bevor wir die Weitzenböck-Formel aufstellen und beweisen können, werden einige Bezeichnungen definiert.

Definition 2.11.:

Sei $u \in C^2(M, N)$; für $w_\nabla(du) = u_{,j}^\gamma \theta_i \otimes \theta_j e_\gamma$ definieren wir

$$\|w_\nabla(du)\|^2 := \gamma_{\alpha\beta}(u) g^{kl} g^{js} u_{,k}^\alpha u_{,l}^\beta u_{,s}^\gamma u_{,j}^\gamma.$$

Für $du \in T^{0,1}(M, W)$ sei

$$Q(du) := -g^{ij} g^{kl} \gamma_{\alpha\gamma}(u) \{ M_{R_{lik}}^S u_j^\gamma u_s^\alpha + N_{\beta\tau\gamma}^\alpha u_l^\beta u_i^\tau u_k^\gamma u_j^\gamma \}$$

Bemerkung:

(1) $\|\cdot\|$ definiert eine Norm auf $T^{0,2}(M, W)$.

(2) Mit Abschnitt 2.1., (35) erhält man

$$(48) \quad Q(du) = g^{ij} \gamma_{\alpha\gamma}(u) \{ M_{Ric_{si}} u_j^\gamma u_s^\alpha - g^{kl} N_{\beta\tau\gamma}^\alpha u_l^\beta u_i^\tau u_k^\gamma u_j^\gamma \}.$$

Satz 2.6. (Weitzenböck-Formel):

Sei $u \in C^2(M, N)$ eine harmonische Abbildung, dann gilt

$$(1) \quad \Delta_M (Sp_M \langle du, du \rangle_N) = 2 \|w_\nabla(du)\|^2 + 2Q(du)$$

$$(2) \quad \Delta_M e(u) = \|w_\nabla(du)\|^2 + Q(du)$$

Beweis:

1. Da u eine harmonische Abbildung ist, gilt nach dem Regularitätssatz von J. Eells, J.H. Sampson (vgl. Kapitel 1 dieser Arbeit) $u \in C^\infty(M, N)$. Insbesondere sind alle in den folgenden Rechnungen vorkommenden Ableitungen von u wohldefiniert.

$$\underline{2.} \quad \text{Sp}_M \langle du, du \rangle_N = g^{ij}{}_{\gamma_{\alpha\nu}}(u) u_i^\alpha u_j^\nu = g^{ij}{}_{\gamma_{\alpha\nu}}(u) u_{,i}^\alpha u_{,j}^\nu$$

Wegen der Symmetrie der metrischen Tensoren, der Vertauschbarkeit der zweiten (partiellen) kovarianten Ableitungen (vgl. Satz 2.5., (1)) und $M_{\nabla g} = 0$, ${}^W \nabla a = 0$ mit $a = (a_{\alpha\nu}) = (\gamma_{\alpha\nu}(u))$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\text{Sp}_M \langle du, du \rangle_N)_{,k} &= g^{ij}{}_{\gamma_{\alpha\nu}}(u_{,i}^\alpha u_{,j}^\nu)_{,k} \\ &= g^{ij}{}_{\gamma_{\alpha\nu}}(u_{,i,k}^\alpha u_{,j}^\nu + u_{,i}^\alpha u_{,j,k}^\nu) \\ &= 2g^{ij}{}_{\gamma_{\alpha\nu}} u_{,i,k}^\alpha u_{,j}^\nu \end{aligned}$$

und analog

$$(\text{Sp}_M \langle du, du \rangle_N)_{,k,l} = 2g^{ij}{}_{\gamma_{\alpha\nu}}(u_{,i,k}^\alpha u_{,j,l}^\nu + u_{,i,k,l}^\alpha u_{,j}^\nu) .$$

Nach Satz 2.5. (2) gilt:

$$u_{,i,k,l}^\alpha = u_{,k,i,l}^\alpha = u_{,k,l,i}^\alpha + u_s^\alpha M_{i\ell k}^s + N_{\tau\beta\gamma}^\alpha u_i^\tau u_\ell^\beta u_k^\gamma$$

Auf Grund der Symmetrieeigenschaften des Krümmungstensors auf N (vgl. Anhang, Hilfssatz 2) gilt:

$$N_{\tau\beta\gamma}^\alpha u_i^\tau u_\ell^\beta u_k^\gamma = - N_{\beta\tau\gamma}^\alpha u_\ell^\beta u_i^\tau u_k^\gamma, \quad M_{i\ell k}^s = - M_{\ell i k}^s .$$

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\text{Sp}_M \langle du, du \rangle_N)_{,k,l} &= 2g^{ij}{}_{\gamma_{\alpha\nu}} \{ u_{,i,k}^\alpha u_{,j,l}^\nu + u_{,k,l,i}^\alpha u_{,j}^\nu \\ &\quad + u_{,j}^\nu u_s^\alpha M_{i\ell k}^s - N_{\beta\tau\gamma}^\alpha u_j^\nu u_\ell^\beta u_i^\tau u_k^\gamma \} . \end{aligned}$$

Wegen $g^{k\ell} u_{,k,l,i}^\alpha = (g^{k\ell} u_{,k,l}^\alpha)_{,i} = \tau(u)^\alpha_{,i} = 0$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 g^{kl} (Sp_M \langle du, du \rangle_N)_{,k',l} &= 2\gamma_{\alpha\nu} g^{ij} g^{kl} u_{,i}^{\alpha} u_{,j}^{\nu}{}_{,l} \\
 &- 2g^{ij} \gamma_{\alpha\nu} u_{,j}^{\nu} u_{,i}^{\alpha} g^{kl} M_{R_{lik}}^S \\
 &- 2\gamma_{\alpha\nu} g^{ij} g^{kl} N_{R_{\beta\tau\gamma}}^{\alpha} u_{,l}^{\beta} u_{,i}^{\tau} u_{,k}^{\gamma} u_{,j}^{\nu} .
 \end{aligned}$$

Mit (46) aus dem Korollar zu Lemma 2.3. und Definition 2.11. gilt also:

$$\Delta_M (Sp_M \langle du, du \rangle_N) = 2 \|w_{\nabla}(du)\|^2 + 2Q(du).$$

3. Wegen $e(u) = \frac{1}{2} Sp_M \langle du, du \rangle_N$ und der Linearität von Δ_M haben wir sofort

$$\Delta_M e(u) = \|w_{\nabla}(du)\|^2 + Q(du).$$

Korollar:

(1) Bezüglich ON-Basisfelder $\{E_1, \dots, E_m\}$ und $\{e_1, \dots, e_n\}$ hat man

$$(49) \quad \|w_{\nabla}(du)\|^2 = \sum_{\alpha, k, l} (u_{,k',l}^{\alpha})^2 \quad \text{und}$$

$$(50) \quad Q(du) = M_{Ric_{si}} u_s^{\alpha} u_i^{\alpha} - N_{R_{\beta\tau\gamma}}^{\alpha} u_l^{\beta} u_i^{\tau} u_l^{\gamma} u_i^{\alpha}.$$

(2) Im Fall $N = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik, $u \in C^2(M)$ harmonische Funktion gilt:

$$(51) \quad Q(du) = M_{Ric_{si}} u_s u_i.$$

Beweis:

(1) Im Fall von ON-Basisfeldern ist $g^{ij} = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq m$, und

$$\gamma_{\alpha\nu} = \delta_{\alpha\nu}, \quad 1 \leq \alpha, \nu \leq n.$$

(2) $N = \mathbb{R}$ ist eine "flache" Mannigfaltigkeit, alle Krümmungsterme verschwinden.

3. Der geodätische Abstand: Definition, Differenzierbarkeit und Abschätzungen

Neben der Energiedichte $e(u)$, für die wir im Abschnitt 2.3. die Weitzenböck-Formel hergeleitet haben, benötigen wir zur Konstruktion der zum Beweis der Liouville-Sätze notwendigen Hilfsfunktionen noch eine über die Abstandsfunktion erklärte Funktion auf einer riemannschen Mannigfaltigkeit:

Den geodätischen Abstand zu einem beliebigen aber fest gewählten Referenzpunkt.

Die Eigenschaften dieser Funktion werden in diesem Kapitel untersucht.

3.1. Definition und Differenzierbarkeit des geodätischen Abstands

Zunächst erklären wir, was wir unter dem geodätischen Abstand verstehen, dazu dient

Definition 3.1.:

Sei M eine vollständige, m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit Abstandsfunktion dist_M ; $x_0 \in M$ sei ein beliebig aber fest gewählter Referenzpunkt.

Dann wird der geodätische Abstand $r_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$r_M(x) := \text{dist}_M(x_0, x) .$$

Falls eindeutig klar ist, auf welche Mannigfaltigkeit M wir Bezug nehmen, schreiben wir auch r statt r_M .

Wegen der Vollständigkeit der Mannigfaltigkeit M (vgl. Satz 2.1. (Hopf, Rinow)) gibt es eine Geodätische der Länge $r_M(x)$ in M (minimierende Geodätische) mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x . Dies gilt für jeden Punkt $x \in M$.

Zu dem festen Referenzpunkt $x_0 \in M$ betrachten wir die nach

Satz 2.4. gegebene Zerlegung von M

$$M = \exp_{x_0}(E(x_0)) \cup C(x_0)$$

in den Schnittpunkt $C(x_0)$ von x_0 in M und dessen Komplement in M $\exp_{x_0}(E(x_0))$.

Bezüglich dieser Zerlegung der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit M erhalten wir den

Satz 3.1.:

Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit und r_M der geodätische Abstand zum festen Referenzpunkt $x_0 \in M$, dann gilt:

- (1) r_M ist auf M stetig.
- (2) $r_M^2 \in C^\infty(\exp_{x_0}(E(x_0)))$.
- (3) $r_M \in C^\infty(\exp_{x_0}(E(x_0)) \setminus \{x_0\})$.

Beweis:

1. Da dist_M eine Metrik auf M definiert, erhält man aus der Dreiecksungleichung für $x, y \in M$

$$|r_M(x) - r_M(y)| = |\text{dist}_M(x_0, x) - \text{dist}_M(x_0, y)| \leq \text{dist}_M(x, y).$$

Damit ist die Stetigkeit von r_M klar.

2. Sei $x \in \exp_{x_0}(E(x_0))$ also $x \notin C(x_0)$. Nach Satz 2.2. und Satz 2.4. gilt:

$c : [0, 1] \rightarrow M$ mit $c(t) := \exp_{x_0}^{-1}(t \exp_{x_0}^{-1}(x))$ ist die eindeutig bestimmte, minimierende Geodätische in M mit Anfangspunkt

$c(0) = x_0$ und Endpunkt $c(1) = x$; sie ist frei von konjugierten Punkten.

$\exp_{x_0} : E(x_0) \rightarrow \exp_{x_0}(E(x_0))$ ist ein Diffeomorphismus, insbesondere ist $\exp_{x_0}^{-1} : \exp_{x_0}(E(x_0)) \rightarrow E(x_0)$ eine C^∞ -Abbildung. Außerdem ist die Abbildung $g(x_0) : T_{x_0}M \times T_{x_0}M \rightarrow \mathbb{R}$ von der Klasse C^∞ . Damit ist

$$\begin{aligned} r_M^2(x) &= \text{dist}_M^2(x_0, x) \\ &= L(c) \\ &= \langle \exp_{x_0}^{-1}(x), \exp_{x_0}^{-1}(x) \rangle_{x_0} \\ &= g(x_0)(\exp_{x_0}^{-1}(x), \exp_{x_0}^{-1}(x)) , \end{aligned}$$

und $r_M^2|_{\exp_{x_0}(E(x_0))}$ ist als Komposition von C^∞ -Abbildungen eine C^∞ -Abbildung.

3. Wir haben $r_M(x) = \sqrt{r_M^2(x)} = \sqrt{g(x_0)(\exp_{x_0}^{-1}(x), \exp_{x_0}^{-1}(x))}$ und mit $\exp_{x_0}^{-1}(x_0) = 0 \in T_{x_0}M : r_M(x_0) = 0$. Die Funktion $t \rightarrow \sqrt{t}$ ist für $t > 0$ aus der Klasse C^∞ , also ist mit (2) die Abbildung $x \rightarrow \sqrt{r_M^2(x)} = r_M(x)$ auf $\exp_{x_0}(E(x_0)) \setminus \{x_0\}$ von der Klasse C^∞ .

Bemerkung:

1. In den Punkten $x \in C(x_0)$, dem Schnittort von x_0 in M , ist die Abbildung r_M i.a. nicht differenzierbar. Im Abschnitt 3.5. werden wir eine "support-Funktion" zu r_M konstruieren. Das ist eine in einem später präzisierten Sinn "approximierende" Funktion zu r_M , die darüber hinaus auch in dem jeweils betrachteten Punkt $x \in C(x_0)$ differenzierbar ist.

2. Falls $\exp_{x_0} : T_{x_0}M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus ist, so ist der

geodätische Abstand r_M bezüglich $x_0 \in M$ sogar aus $C^\infty(M \setminus \{x_0\})$.

Dies ist z.B. dann der Fall, wenn M eine Cartan-Hadamard-Mannigfaltigkeit ist (zum Begriff der Cartan-Hadamard-Mannigfaltigkeit vgl. Abschnitt 3.3.).

3.2. Das Gradientenfeld von r_M und Formeln für $\Delta_M r_M, \Delta_M (r_M)^2$

Im Folgenden sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang M_V .

Unter dem Gradientenfeld Df von $f \in F(M)$ verstehen wir das zur 1-Form df existierende, eindeutig bestimmte (vgl. D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 82) Vektorfeld mit

$$(52) \quad \langle Df, v \rangle = g(Df, v) = df(v) = v(f) \quad \forall v \in V(M) .$$

Für ein Basisfeld $\{E_1, \dots, E_m\}$ bezüglich einer lokalen Karte gilt mit $E_i(f) = f_{,i} = f_i$:

$$(53) \quad Df = (g^{ij} f_{,i}) E_j .$$

Für das Gradientenfeld des geodätischen Abstands r_M gilt

Lemma 3.1.:

Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit; $x, x_0 \in M$. Sei $c : [0, \ell] \rightarrow M$ die minimierende, normale Geodätische in M mit Anfangspunkt $x_0 = c(0)$ und Endpunkt $x = c(\ell) \in \exp_{x_0}(E(x_0))$. Dann gilt mit $c(x) := c(\ell)$:

$$Dr_M(x) = \dot{c}(x) .$$

Beweis: $x \in \exp_{x_0}(E(x_0))$ garantiert nach Satz 3.1. die Differenzierbarkeit von r_M in x ; überdies hat man $r_M(x) = \ell$. Zur Berechnung von $Dr_M(x) = \dot{c}(x)$ siehe Anhang, Hilfssatz 7.

Korollar: Insbesondere gilt

$$\|Dr_M\| = \langle Dr_M, Dr_M \rangle^{1/2} = \sqrt{g(Dr_M, Dr_M)} = 1$$

Beweis: c ist normale Geodätische, d.h. nach Bogenlänge parametrisiert, daher $\langle Dr_M, Dr_M \rangle = \langle \dot{c}, \dot{c} \rangle = 1$.

Der Hesse-Tensor $H_f \in T^{0,2}(M)$ von f ist definiert durch

$$H_f(u, v) := \langle M_{\nabla_u} Df, v \rangle = g(M_{\nabla_u} Df, v) ,$$

und es gilt mit $f_k = f_{,k} = E_k(f)$, $f_{ij} = E_j(E_i(f))$ bezüglich eines Basisfelds $\{E_1, \dots, E_m\}$ (vgl. Anhang, Hilfssatz 6):

$$\begin{aligned} H_f(E_i, E_j) &= E_i(E_j(f)) - M_{\nabla_{E_i}} E_j(f) \\ &= E_j(E_i(f)) - M_{\nabla_{E_j}} E_i(f) = H_f(E_j, E_i) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \Delta_M f &= g^{ij} (f_{ij} - \Gamma_{ij}^k f_k) \\ &= g^{ij} (E_i(E_j(f)) - M_{\nabla_{E_i}} E_j(f)) \\ &= g^{ij} H_f(E_i, E_j) \\ &= \text{Sp}_M H_f , \end{aligned}$$

wir haben also: $\Delta_M f = \text{Sp}_M H_f$

Falls $\{E_1, \dots, E_m\}$ ein ON-Basisfeld ist folgt damit

$$\begin{aligned} \Delta_M f &= \sum_{i=1}^m H_f(E_i, E_i) \\ &= E_i(E_i(f)) - (M_{\nabla_{E_i}} E_i)(f) , \end{aligned}$$

genauer:

Im Punkt $x \in M$ haben wir

$$\Delta_M^f(x) = E_1(x)(E_1(f)) - (M_{\nabla_{E_1(x)} E_1(x)})(f) ,$$

dabei ist $\{E_1(x), \dots, E_m(x)\}$ eine ON-Basis von $T_x M$.

Für Vektorfelder $E_i, V_i, 1 \leq i \leq m$, mit $E_i(x) = V_i(x)$ gilt nach Definition der entsprechenden Operationen:

$$E_i(x)(E_1(f)) = E_i(x)(V_1(f)) = V_i(x)(V_1(f))$$

$$M_{\nabla_{E_1(x)} E_1(x)}(f) = M_{\nabla_{V_1(x)} V_1(x)}(f)$$

und damit

$$(54) \quad \Delta_M^f(x) = V_1(x)(V_1(f)) - M_{\nabla_{V_1(x)} V_1(x)}(f) .$$

Mit diesen Vorbereitungen beweisen wir eine spezielle Darstellung für Δ_M^f ; wir haben

Lemma 3.2.:

Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit.

- (1) Zu $x \in M$ sei $\{E_1(x), \dots, E_m(x)\}$ eine ON-Basis von $T_x M$; es seien $\gamma_i, 1 \leq i \leq m$, Geodätische in M mit $\gamma_i(0) = x$ und $\dot{\gamma}_i(0) = E_i(x), 1 \leq i \leq m$. Dann gilt für $f \in F(M)$:

$$\Delta_M^f(x) = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}_i(\dot{\gamma}_i(f))(0) .$$

- (2) Seien $x, x_0 \in M; x \neq x_0, x \in \exp_{x_0}(E(x_0))$. Sei $c : [0, \ell] \rightarrow M$ die minimierende, normale Geodätische in M mit Anfangspunkt $x_0 = c(0)$ und Endpunkt $x = c(\ell)$.

Setze $\dot{c}(x) := \dot{c}(\ell)$ und sei $\{E_1(x), \dots, E_{m-1}(x), \dot{c}(x)\}$ ON-Basis für $T_x M$. γ_i , $1 \leq i \leq m-1$, seien Geodätische in M mit $\gamma_i(0) = x$ und $\dot{\gamma}_i(0) = E_i(x)$, $1 \leq i \leq m-1$. Dann gilt für r_M :

$$\Delta_M r_M(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\gamma}_i(\dot{\gamma}_i(r_M))(0) \quad .$$

Beweis:

1. Mit $V_i = \dot{\gamma}_i$ und $x = \gamma_i(0)$ also $V_i(x) = \dot{\gamma}_i(0) = E_i(x)$, $1 \leq i \leq m$, folgt aus (54):

$$\Delta_M f(x) = \dot{\gamma}_i(0)(\dot{\gamma}_i(f)) - {}^M_{V_{\dot{\gamma}_i(0)}} \dot{\gamma}_i(0)(f) \quad .$$

Da γ_i , $1 \leq i \leq m$, Geodätische in M ist, gilt ${}^M_{V_{\dot{\gamma}_i}} \dot{\gamma}_i = 0$ also

$$\Delta_M f(x) = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}_i(0)(\dot{\gamma}_i(f)) = \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}_i(\dot{\gamma}_i(f))(0) \quad .$$

2. Nach Satz 3.1. ist $r_M \in C^\infty(\exp_{x_0}(E(x_0)) \setminus \{x_0\})$.

Definiere $\gamma_m(t) := c(\ell-t)$, dann ist $\gamma_m: [0, \ell] \rightarrow M$ Geodätische in M mit $\gamma_m(0) = c(\ell) = x$ und $\dot{\gamma}_m(0) = -\dot{c}(\ell) = -\dot{c}(x)$.

Sei $E_m(x) := -\dot{c}(x)$, dann ist nach Voraussetzung $\{E_1(x), \dots, E_{m-1}(x), E_m(x)\}$ eine ON-Basis von $T_x M$ und gemäß (1) folgt:

$$\begin{aligned} \Delta_M r_M(x) &= \sum_{i=1}^m \dot{\gamma}_i(\dot{\gamma}_i(r_M))(0) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\gamma}_i(\dot{\gamma}_i(r_M))(0) + \dot{c}(x)(\dot{c}(x)(r_M)) \quad . \end{aligned}$$

Nach Definition des Gradientenfeldes und Lemma 3.1. gilt:

$$\dot{c}(x)(r_M) = \langle Dr_M(x), \dot{c}(x) \rangle = \langle \dot{c}(x), \dot{c}(x) \rangle \quad .$$

Da c normale Geodätische ist, gilt $\langle \ddot{c}, \dot{c} \rangle = 1$ also
 $\dot{c}(x) (\dot{c}(x)(r_M)) = \dot{c}(x) (\langle \dot{c}(x), \dot{c}(x) \rangle) = 0$ und damit

$$\Delta_M r_M(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\gamma}_i (\dot{\gamma}_i(r_M))(0) .$$

Zum Abschluß dieses Abschnitts wird noch eine Formel für $\Delta_M(r_M^2)$ bereitgestellt.

Lemma 3.3.:

Sei M vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit;
 $x, x_0 \in M, x \neq x_0, x \in \exp_{x_0}(E(x_0))$, dann gilt:

$$\Delta_M(r_M^2)(x) = 2(1 + r_M(x) \Delta_M r_M(x)) .$$

Beweis:

Nach Satz 3.1. ist die Differenzierbarkeit von r_M^2 in x gesichert. Wir erhalten

$$(r_M^2)_{,i} = 2r_{M,i}r_M; (r_M^2)_{,i',j} = 2r_{M,i}r_{M',j} + 2r_M r_{M,i',j}$$

$$\text{also } \Delta_M(r_M^2) = g^{ij}(r_M^2)_{,i',j}$$

$$= 2(g^{ij}r_{M,i}r_{M',j} + r_M g^{ij}r_{M,i',j})$$

$$= 2(\|Dr_M\|^2 + r_M \Delta_M r_M)$$

und mit dem Korollar zu Lemma 3.1.:

$$\Delta_M(r_M^2) = 2(1 + r_M \Delta_M r_M) .$$

3.3. Ein Vergleichssatz für den Laplace-Beltrami-Operator

In diesem Abschnitt wird ein Vergleichssatz für $\Delta_M r_M$ und

$\Delta_M^{\gamma} r_M^{\gamma}$ hergeleitet. Dabei sind M und $\tilde{M}$ m -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeiten.

In der Anwendung wird $\tilde{M}$ eine "einfache" zu der von uns betrachteten Urbildmannigfaltigkeit M "passende" Vergleichsmannigfaltigkeit sein, deren Abstandsfunktion einschließlich der Abschätzungen von $\Delta_M^{\gamma} r_M^{\gamma}$ einfach zu behandeln ist.

Der hier dargestellte Beweis ist eine auf unsere Situation abgestimmte und abgeänderte Variante des "Laplacian-Comparison-Theorem" aus R.E. Greene, H. Wu [22] S. 26 ff.

$\tilde{M}$ sei eine Cartan-Hadamard-Mannigfaltigkeit, das ist eine einfach zusammenhängende, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit nirgends positiver Schnittkrümmung.

Nach dem Satz von Cartan-Hadamard (vgl. D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 201) ist für jeden Punkt $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ die Exponentialabbildung $\exp_{\tilde{x}_0}^{\gamma} : T_{\tilde{x}_0}^{\gamma} \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ ein Diffeomorphismus.

Insbesondere ist $\tilde{M}$ diffeomorph zum $\mathbb{R}^m$, und $(\tilde{M}, \tilde{x}_0)$ ist eine Modell-Mannigfaltigkeit im Sinne von R.E. Greene, H. Wu [22], S. 24. Zunächst formulieren wir den angekündigten Vergleichssatz.

Satz 3.2.:

M sei eine vollständige, m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit. $\tilde{M}$ sei eine m -dimensionale Caratan-Hadamard-Mannigfaltigkeit.

Seien $x, x_0 \in M$ mit $x \in \exp_{x_0}^{\gamma}(E(x_0))$ und $\tilde{x}, \tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ mit $\tilde{x} \in \exp_{\tilde{x}_0}^{\gamma}(E(\tilde{x}_0))$. Für x und $\tilde{x}$ gelte

$$(1) \quad r_M(x) = r_{\tilde{M}}(\tilde{x}) \quad .$$

Es sei $c : [0, \ell] \rightarrow M$ die normale Geodätische in M mit $c(0) = x_0$ und $c(\ell) = x$;

entsprechend sei $\tilde{c} : [0, \ell] \rightarrow \hat{M}$ die normale Geodätische in $\hat{M}$ mit $\tilde{c}(0) = \tilde{x}_0$ und $\tilde{c}(\ell) = \tilde{x}$. Es gelte für die Vektorfelder $\dot{c}, \dot{\tilde{c}}$

$$(2) \quad {}^M \text{Ric}(\dot{c}, \dot{c}) \geq {}^{\hat{M}} \text{Ric}(\dot{\tilde{c}}, \dot{\tilde{c}})$$

Dann gilt:

$$(3) \quad \Delta_M r_M(x) \leq \Delta_{\hat{M}} r_{\hat{M}}(\tilde{x})$$

Beweis:

Als erstes sei bemerkt, daß auf Grund der Voraussetzungen und der Konstruktion die beiden Geodätischen frei von konjugierten Punkten sind; es ist auch $r_M(x) = r_M(\tilde{x}) = \ell$.

Der Beweis von Satz 3.2. ist in fünf Abschnitte gegliedert.

1. Wir betrachten in $x = c(\ell)$ eine spezielle ON-Basis von $T_x M$, nämlich $\{E_1(x), \dots, E_{m-1}(x), \dot{c}(x)\}$ mit $\dot{c}(x) = \dot{c}(\ell)$. Dann seien $\gamma_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, $1 \leq i \leq m-1$, normale Geodätische in M mit $\gamma_i(0) = x$, $\dot{\gamma}_i(0) = E_i(x)$; dabei sei $\varepsilon > 0$ so klein gewählt, daß $\gamma_i((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq \exp_{x_0}(E(x_0))$ gilt, $1 \leq i \leq m-1$. Dies ist möglich, weil $\exp_{x_0}(E(x_0))$ nach Satz 2.4. offen ist.

$c_s^i : [0, \ell] \rightarrow M$ bezeichne die minimierende Geodätische in M mit Anfangspunkt $x_0 = c_s^i(0)$ und Endpunkt $\gamma_i(s) = c_s^i(\ell)$, $1 \leq i \leq m-1$, $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

$\{c_s^i : [0, \ell] \rightarrow M \mid s \in (-\varepsilon, \varepsilon)\}$ ist eine 1-parametrische Familie von Geodätischen in M mit $c_0^i = c$, d.h. c_s^i ist eine Variation von c , $1 \leq i \leq m-1$.

Das Vektorfeld J^i längs c sei wie folgt definiert:

Für $t \in [0, \ell]$ ist $J^i(t)$ der Tangentialvektor der Kurve $s \rightarrow c_s^i(t)$ an der Stelle $s = 0$; es gilt nach Konstruktion der Kurven c_s^i als Variation von c und dem Gauß-Lemma:

(4) $J^i(t) \perp \dot{c}(t)$, d.h. $\langle J^i(t), \dot{c}(t) \rangle = g(c(t))(J^i(t), \dot{c}(t)) = 0$
für alle $t \in [0, \ell]$, $1 \leq i \leq m-1$.

(5) $J^i(\ell) = E_i(x)$, $1 \leq i \leq m-1$, denn $c_s^i(\ell) = \gamma_i(s)$ und
 $\dot{\gamma}_i(0) = E_i(x)$.

(6) $J^i(0) = 0$, $1 \leq i \leq m-1$, denn $c_s^i(0) = x_0 \forall s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

(7) $J^i \in \mathcal{V}_C(M)$, $1 \leq i \leq m-1$, ist ein Jacobi-Feld längs c .

Nach Lemma 3.2. erhalten wir mit dieser Konstruktion

$$\Delta_M r_M(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \dot{\gamma}_i(\dot{\gamma}_i(r_M))(0) .$$

Nun gilt aber:

$$\dot{\gamma}_i(r_M)(0) = \frac{d}{ds} (r_M \circ \gamma_i) \big|_{s=0} ,$$

bezeichne $L_i(s) = L(c_s^i)$ die Länge der Kurve c_s^i , dann ist nach Konstruktion

$$L_i(s) = r_M(\gamma_i(s)) = r_M \circ \gamma_i(s) \quad \text{also}$$

$$\gamma_i(r_M)(s) = \frac{d}{ds} (r_M \circ \gamma_i)(s) = \frac{d}{ds} L_i(s), \quad 1 \leq i \leq m-1 .$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} L_i''(0) &:= \frac{d^2}{ds^2} L_i(s) \big|_{s=0} = \frac{d}{ds} (\dot{\gamma}_i(r_M) \circ \gamma_i)(s) \big|_{s=0} \\ &= \dot{\gamma}_i(\dot{\gamma}_i(r_M))(0) , \end{aligned}$$

also insgesamt

$$(8) \quad \Delta_M r_M(x) = \sum_{i=1}^{m-1} L_i''(0) .$$

Mit Hilfe der Formel für die zweite Variation der Bogenlänge (vgl. J. Cheeger, D. Ebin [6], S. 21) erhalten wir für $1 \leq i \leq m-1$:

$$\begin{aligned} L_i''(0) &= \int_0^{\ell} \{ \langle \dot{J}^i, \dot{J}^i \rangle + \langle M_R(J^i, \dot{c}) J_{i-1}, \dot{c} \rangle \} dt \\ &= \int_0^{\ell} \{ \langle \dot{J}^i, \dot{J}^i \rangle - \langle M_R(J^i, \dot{c}) \dot{c}, J^i \rangle \} dt \\ &= I(J^i, J^i). \end{aligned}$$

Dabei ist I die Indexform von c (zur Definition siehe D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 142).
Damit haben wir bisher

$$\begin{aligned} (9) \quad \Delta_{MM} r_M(x) &= \sum_{i=1}^{m-1} I(J^i, J^i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^{\ell} \{ \langle \dot{J}^i, \dot{J}^i \rangle - \langle M_R(J^i, \dot{c}) \dot{c}, J^i \rangle \} dt. \end{aligned}$$

2. Mit denselben Rechnungen erhalten wir

$$\begin{aligned} (10) \quad \Delta_{\tilde{M}\tilde{M}} r_{\tilde{M}}(\tilde{x}) &= \sum_{i=1}^{m-1} \tilde{I}(\tilde{J}^i, \tilde{J}^i) \\ &= \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^{\ell} \{ \langle \dot{\tilde{J}}^i, \dot{\tilde{J}}^i \rangle - \langle \tilde{M}_R(\tilde{J}^i, \dot{\tilde{c}}) \dot{\tilde{c}}, \tilde{J}^i \rangle \} dt, \end{aligned}$$

dabei ist $\tilde{I}$ die Indexform von $\tilde{c}$, und die Vektorfelder $\tilde{J}^i$, $1 \leq i \leq m-1$, längs $\tilde{c}$ entsprechen den Vektorfeldern J^i , $1 \leq i \leq m-1$. Für $\tilde{J}^i$, $1 \leq i \leq m-1$, gilt die analoge Fassung der Aussagen (4) bis (7).

3. Da $\tilde{M}$ als Cartan-Hadamard-Mannigfaltigkeit insbesondere eine Modell-Mannigfaltigkeit im Sinne von R.E. Greene, H. Wu ist, gilt (nach R.E. Greene, H. Wu [22], Cor. 2.14., S. 26 und S. 27):

$$\|\dot{J}^i(t)\| = \|\dot{J}^k(t)\| \quad \forall t \in [0, \ell], \quad 1 \leq i, k \leq m-1$$

und $\{\dot{J}^i | 1 \leq i \leq m-1\}$ sind orthogonale Felder. Damit erhalten wir aus (10):

$$\Delta_{\dot{M}\dot{M}}^{r_M}(\dot{x}) = \sum_{i=1}^{m-1} \int_0^\ell \{ \|\dot{J}^i\|^2 - \|\dot{J}^1\|^2 \langle \hat{M}_R(\dot{T}^i, \dot{c}) \dot{c}, \dot{T}^i \rangle \} dt$$

$$\text{mit } \dot{T}^i := \frac{1}{\|\dot{J}^i\|} \dot{J}^i, \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

Da nach Konstruktion $\{\dot{T}^1, \dots, \dot{T}^{m-1}, \dot{c}\}$ ein ON-Basisfeld ist, folgt mit

$$\hat{M}_{\text{Ric}}(\dot{c}, \dot{c}) = \sum_{i=1}^{m-1} \langle \hat{M}_R(\dot{T}^i, \dot{c}) \dot{c}, \dot{T}^i \rangle$$

(vgl. dazu S. Kobayashi, K. Nomizu [49], S. 249, man beachte $\langle \hat{M}_R(\dot{c}, \dot{c}) \dot{c}, \dot{c} \rangle = 0$):

$$(11) \quad \Delta_{\dot{M}\dot{M}}^{r_M}(\dot{x}) = \int_0^\ell \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} \|\dot{J}^i\|^2 - \|\dot{J}^1\|^2 \hat{M}_{\text{Ric}}(\dot{c}, \dot{c}) \right\} dt.$$

4. Die folgende Konstruktion ermöglicht schließlich einen Vergleich von $\Delta_{\dot{M}\dot{M}}^{r_M}(\dot{x})$ und $\Delta_M^{r_M}(x)$:

Zu J^i , $1 \leq i \leq m-1$, gibt es ON-Basisfelder P_j^i , $1 \leq j \leq m$, die folgende Bedingungen erfüllen für $1 \leq i \leq m-1$:

$$(12) \quad P_j^i, \quad 1 \leq j \leq m, \text{ sind parallele Vektorfelder längs } c,$$

$$\text{also } M_{\nabla_{\dot{c}} P_j^i} = 0;$$

$$(13) \quad P_{m-1}^i(\ell) = J^i(\ell) = E_i(x) \text{ und } P_m^i(\ell) = \dot{c}(\ell) = \dot{c}(x);$$

$$(14) \quad \{P_j^i(0) | 1 \leq j \leq m\} \text{ ist ON-Basis von } T_{x_0}^M.$$

Die Existenz solcher ON-Basisfelder P_j^i sieht man folgendermaßen:

Man definiert P_{m-1}^i durch Parallelverschiebung (vgl. D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 50) von $J^i(\ell) = E_i(x)$ längs der Kurve $-c : [0, \ell] \rightarrow M$, $-c(t) := c(\ell - t)$.

Man ergänzt dann $P_{m-1}^i(0)$ und $\dot{c}(0)$ zu einer ON-Basis

$\{E_1^i, \dots, E_{m-2}^i, P_{m-1}^i(0), \dot{c}(0)\}$ von $T_{x_0} M$. Die Vektorfelder P_j^i , $1 \leq j \leq m-2$, erhält man danach durch Parallelverschiebung von E_j^i längs der Kurve c . Schließlich setzt man $P_m^i := \dot{c}$.

Analog konstruiert man zu J^i , $1 \leq i \leq m-1$, ON-Basisfelder $\hat{P}_j^i$, $1 \leq j \leq m$, die den (12) bis (14) analogen Bedingungen auf $\hat{M}$ genügen.

Mit Hilfe dieser ON-Basisfelder $\hat{P}_j^i$ definieren wir jetzt reelle Funktionen $h_j^i : [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq m-1$, $1 \leq j \leq m$, durch:

$$J^i(t) = \sum_{j=1}^m h_j^i(t) \hat{P}_j^i(t) \quad \text{für } t \in [0, \ell] .$$

Aus $0 = J^i(0)$ und $J^i(\ell) = \hat{P}_m^i(\ell)$ erhält man

$$(15) \quad h_j^i(0) = 0, \quad 1 \leq j \leq m, \quad 1 \leq i \leq m-1$$

$$(16) \quad h_j^i(\ell) = 0, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad 1 \leq i \leq m-1$$

$$h_m^i(\ell) = 1, \quad 1 \leq i \leq m-1 .$$

Mit den Funktionen h_j^i erklären wir Vektorfelder längs c auf M durch

$$(17) \quad J_*^i(t) := \sum_{j=1}^m h_j^i(t) P_j^i(t) \quad \text{für } t \in [0, \ell], \quad 1 \leq i \leq m-1 .$$

Wegen (15), (16) haben wir

$$(18) \quad J_*^i(0) = 0 = J^i(0) \quad \text{und} \quad J_*^i(l) = J^i(l) = E_i(x), 1 \leq i \leq m-1.$$

Da die Vektorfelder $P_j^i, \hat{P}_j^i$ parallel längs c bzw. $\tilde{c}$ sind, gilt

$$\dot{J}_*^i(t) = \sum_{j=1}^m h_j^{i'}(t) P_j^i(t), \quad \dot{\hat{J}}^i(t) = \sum_{j=1}^m h_j^{i'}(t) \hat{P}_j^i(t)$$

und wegen der Orthonormalität

$$\|J_*^i(t)\|^2 = \sum_{j=1}^m (h_j^i(t))^2 = \|J^i(t)\|^2 = \|\hat{J}^i(t)\|^2 \quad \text{für } t \in [0, l],$$

$1 \leq i \leq m-1$; insbesondere also auch $\|J_*^i(t)\| = \|\hat{J}_*^i(t)\|$, $1 \leq i \leq m-1$,
 $t \in [0, l]$;

$$\|\dot{J}_*^i(t)\|^2 = \sum_{j=1}^m (h_j^{i'}(t))^2 = \|\dot{\hat{J}}^i(t)\|^2 \quad \text{für } t \in [0, l], \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

5. Da die Geodätische c frei von konjugierten Punkten ist, folgt aus der Indexungleichung (D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 145; J. Cheeger, D. Ebin [6], S. 24) unter Beachtung von (18)

$$I(J^i, J^i) \leq I(J_*^i, J_*^i), \quad 1 \leq i \leq m-1.$$

Mit (9) erhalten wir mit $T_*^i := \frac{1}{\|J_*^i\|} J_*^i$:

$$\Delta_M r_M(x) \leq \sum_{i=1}^{m-1} I(J_*^i, J_*^i)$$

$$= \int_0^l \sum_{i=1}^{m-1} \{ \|\dot{J}_*^i\|^2 - \langle M_R(J_*^i, \dot{c}) \dot{c}, J_*^i \rangle \} dt$$

$$= \int_0^{\ell} \sum_{i=1}^{m-1} \{ \| \dot{J}_*^i \|^2 - \| J_*^1 \|^2 \langle M_R(T_*^1, \dot{c}) \dot{c}, T_*^1 \rangle \} dt$$

$$= \int_0^{\ell} \{ \left(\sum_{i=1}^{m-1} \| \dot{J}_*^i \|^2 \right) - \| J_*^1 \|^2 M_{Ric}(\dot{c}, \dot{c}) \} dt .$$

Nach Voraussetzung (3) gilt $-M_{Ric}(\dot{c}, \dot{c}) \leq -\hat{M}_{Ric}(\dot{c}, \dot{c})$ also

$$\Delta_M r_M(x) \leq \int_0^{\ell} \{ \left(\sum_{i=1}^{m-1} \| \dot{J}_*^i \|^2 \right) - \| J_*^1 \|^2 \hat{M}_{Ric}(\dot{c}, \dot{c}) \} dt = \Delta_M r_M(\hat{x}) .$$

Damit ist der Beweis des Vergleichssatzes abgeschlossen.

3.4. Eine Abschätzung für $\Delta_M r_M$ und $\Delta_M(r_M^2)$

In diesem Abschnitt wird der Vergleichssatz, Satz 3.2., angewandt, um in dem uns interessierenden Fall einer vollständigen, riemannschen Mannigfaltigkeit M mit nach unten durch die reelle Konstante $-R_M$ beschränkter Ricci-Krümmung konkrete Abschätzungen für $\Delta_M r_M$ und $\Delta_M(r_M^2)$ zu bekommen.

Entsprechend Abschnitt 2.1., (36) und Definition 2.3. verstehen wir unter der Ricci-Krümmung der m -dimensionalen, vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit M den Ausdruck

$$(55) \quad Ric(M) := \inf_{\substack{x \in M \\ v \in T_x M}} ric_x(v) = \inf_{\substack{x \in M \\ v \in T_x M}} \frac{1}{\|v\|^2} M_{Ric}(v, v) .$$

Satz 3.3.:

Sei M eine m -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit geodätischem Abstand r_M bezüglich eines Punktes $x_0 \in M$ und

$$(1) \quad Ric(M) \geq -R_M$$

für eine nicht negative reelle Konstante R_M . Dann gilt:

$$(2) \Delta_M r_M(x) \leq c(R_M, m) \text{ für alle } x \in \exp_{x_0}(E(x_0)) \text{ mit } r_M(x) \geq 1;$$

$$(3) \Delta_M(r_M^2)(x) \leq c(R_M, m)(1 + r_M(x)) \text{ für alle}$$

$$x \in \exp_{x_0}(E(x_0)) \text{ mit } r_M(x) \geq 1;$$

(4) Im Fall $R_M = 0$, also $\text{Ric}(M) \geq 0$, gilt

$$\Delta_M r_M(x) \leq \frac{m-1}{r_M(x)} \text{ für alle } x \in \exp_{x_0}(E(x_0)) \text{ mit } r_M(x) \geq 1.$$

Beweis: Zum Beweis dieses Satzes wird der Vergleichssatz 3.2. herangezogen. Wir benötigen also zunächst eine "passende, einfache" Vergleichsmannigfaltigkeit $\tilde{M}$.

1. Sei $\tilde{M}$ die (bis auf Isometrie eindeutig bestimmte) einfach zusammenhängende, m -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung (vgl. (37), Abschnitt 2.1.)

$$S_{\tilde{M}}^{\tilde{\chi}}(u, v) = - \frac{R_M}{m-1} \quad \forall \tilde{x} \in \tilde{M}, \quad \forall u, v \in T_{\tilde{x}}\tilde{M}.$$

Sei $\tilde{x}_0 \in \tilde{M}$ ein beliebig gewählter aber fester Referenzpunkt und $r_{\tilde{M}}^{\tilde{\chi}}$ der geodätische Abstand bezüglich $\tilde{x}_0$.

Sei $\tilde{x} \in \tilde{M}$ ein Punkt mit $r_{\tilde{M}}^{\tilde{\chi}}(\tilde{x}) = r_M(x) \geq 1$.

$c : [0, \ell] \rightarrow M$ bezeichne die normale Geodätische in M mit $c(0) = x_0$, $c(\ell) = x$, und $\tilde{c} : [0, \ell] \rightarrow \tilde{M}$ bezeichne die normale Geodätische in $\tilde{M}$ mit $\tilde{c}(0) = \tilde{x}_0$, $\tilde{c}(\ell) = \tilde{x}$ wie in Satz 3.2.. Für ein ON-Basisfeld $\{\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_{m-1}, \tilde{c}\}$ gilt (vgl. S. Kobayashi, K. Nomizu [49], S. 202, S. 249):

$$\tilde{M}_{\text{Ric}}(\tilde{c}, \tilde{c}) = \sum_{i=1}^{m-1} \langle \tilde{M}_R(\tilde{E}_i, \tilde{c}) \tilde{c}, \tilde{E}_i \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{m-1} S_M^{\dot{C}}(\dot{C}) (\dot{E}_i, \dot{C}) \\
 &= (m-1) \left(-\frac{R_M}{m-1} \right) = -R_M .
 \end{aligned}$$

Wegen Voraussetzung (1) gilt also

$$M_{\text{Ric}}(\dot{C}, \dot{C}) \geq \hat{M}_{\text{Ric}}(\dot{C}, \dot{C}) .$$

Damit sind alle Voraussetzungen von Satz 3.2. erfüllt, und wir erhalten:

$$(4) \quad \Delta_M r_M(x) \leq \Delta_M r_M(\tilde{x}) .$$

2. Wir müssen noch $\Delta_M r_M(\tilde{x})$ abschätzen.

Nach R.E. Greene, H. Wu [22], Example 2.25., S. 34/35 gilt

$$\Delta_M r_M(\tilde{x}) \leq R_M \coth\left(\frac{R_M}{m-1} r_M(\tilde{x})\right)$$

Nun gilt (vgl. Anhang, Hilfssatz 8)

$$\coth(\tau) \leq c(R_M, m) \text{ für } \tau \geq \frac{R_M}{m-1} > 0 ,$$

also insgesamt wegen $r_M(\tilde{x}) = r_M(x) \geq 1$

$$\Delta_M r_M(\tilde{x}) \leq c(R_M, m) .$$

Damit folgt aus Abschätzung (4) die Behauptung (2).

3. Behauptung (3) folgt aus (2) und Lemma 3.3. .

4. Behauptung (4) wird analog zu (1) bewiesen. Als Vergleichsmannigfaltigkeit $\hat{M}$ dient eine m -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung 0 (etwa $\mathbb{R}^m$ mit euklidischer Metrik), für die nach R.E. Greene, H. Wu [22] Example 2.21., S. 32 $\Delta_M r_M = \frac{m-1}{r_M}$ gilt.

3.5. Konstruktion und Abschätzung einer Support-Funktion

Wir werden zum Beweis der Liouville-Sätze eine mit Hilfe der Energiedichte $e(u)$ und des geodätischen Abstands r_M konstruierte, stetige Hilfsfunktion mit kompaktem Träger in M an der Stelle, an der diese ihr Maximum annimmt, abschätzen müssen. Da wir nicht a priori garantieren können, daß diese Hilfsfunktion an der Stelle, an der sie ihr Maximum annimmt (Maximalstelle), genügend oft differenzierbar ist (wegen der i.a. nicht gegebenen Differenzierbarkeit von r_M in Punkten aus dem Schnittort $C(x_0)$ des Referenzpunktes x_0), müssen wir gegebenenfalls eine andere Hilfsfunktion betrachten, die an der entsprechenden Maximalstelle der ersten Hilfsfunktion denselben Funktionswert wie diese hat und außerdem hinreichend oft differenzierbar ist.

Zur Konstruktion einer solchen Hilfsfunktion dient die in diesem Abschnitt zu findende Support-Funktion zu r_M (zum Begriff der Support-Funktion vgl. H. Wu [63], S. 112). Die Grundidee der Konstruktion geht wohl zurück auf E. Calabi [5], S. 53; sie wird auch implizit von S.Y. Cheng [7], S. 149/150 benutzt.

Sei M eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, $x_0 \in M$ sei ein beliebig aber fest gewählter Referenzpunkt in M und r_M der auf x_0 bezogene geodätische Abstand.

Sei $x \in M$, $x \neq x_0$, ein Punkt, in dem die Funktion $r_M : M \rightarrow \mathbb{R}$ nicht differenzierbar ist; also gilt insbesondere (vgl. Satz 2.4., Satz 3.1.) $x \in C(x_0)$ dem Schnittort von x_0 in M .

Für diese Situation beweisen wir

Lemma 3.4.:

Seien M, r_M und $x \in M$ wie oben bestimmt, dann gilt:

Zu jedem $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < r_M(x)$ gibt es eine auf einer Umgebung $U(x)$ von x in M definierte C^∞ -Funktion

$$s_M^\varepsilon : U(x) \rightarrow \mathbb{R} ,$$

die wir Support-Funktion zu r_M bezüglich $x \in M$ nennen, mit folgenden Eigenschaften:

$$(1) \quad r_M \leq s_M^\varepsilon \text{ in } U(x) ;$$

$$(2) \quad r_M(x) = s_M^\varepsilon(x) ;$$

$$(3) \quad s_M^\varepsilon(z) \rightarrow r_M(z) \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0 \text{ gleichmäßig bezüglich } z \in U(x) ;$$

$$(4) \quad \|Ds_M^\varepsilon\| = 1 ;$$

$$(5) \quad \Delta_M s_M^\varepsilon(x) \leq c(R_M, m) \text{ falls } r_M(x) \geq 1, \text{ Ric}(M) \geq -R_M$$

$$(6) \quad \Delta_M (s_M^\varepsilon)^2(x) \leq c(R_M, m) (1 + s_M^\varepsilon(x))$$

$$\text{falls } r_M(x) \geq 1, \text{ Ric}(M) \geq -R_M .$$

Beweis:

Sei $c : [0, \ell] \rightarrow M$ eine, wegen der Vollständigkeit von M existierende, minimierende Geodätische in M mit $c(0) = x_0$ und $c(\ell) = x$, $\ell = r_M(x)$.

Sei ein $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon < \ell = r_M(x)$ vorgegeben. Wegen $x \in C(x_0)$ und der Definition des Schnittpunkts von x_0 in M gilt:

Der Punkt $c(\varepsilon) \in M$ ist nicht konjugiert zu x längs c ;

setze $x_\varepsilon := c(\varepsilon) \in M$; nach Konstruktion ist $r_M(x_\varepsilon) = \varepsilon$.

Sei $r_M^\varepsilon : M \rightarrow \mathbb{R}$ der geodätische Abstand in M bezüglich des Referenzpunktes x_ε , nach Konstruktion ist $r_M^\varepsilon(x) = r_M(x) - \varepsilon$

und $x \in \exp_{x_\varepsilon}(E(x_\varepsilon))$, $x \neq x_\varepsilon$. Da $\exp_{x_\varepsilon}(E(x_\varepsilon))$ offen ist,

gibt es (vgl. Satz 3.1.) eine Umgebung $U(x) \subseteq \exp_{x_\varepsilon}(E(x_\varepsilon))$

von x in M , so daß r_M^ε auf $U(x)$ von der Klasse C^∞ ist.

Wir definieren $s_M^\varepsilon : U(x) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$s_M^\varepsilon(z) := r_M^\varepsilon(z) + \varepsilon \quad \text{für } z \in U(x).$$

Dann ist s_M^ε auf $U(x)$ ebenfalls von der Klasse C^∞ .

Es gilt $s_M^\varepsilon(x) = r_M^\varepsilon(x) + \varepsilon = r_M(x) - \varepsilon + \varepsilon = r_M(x)$, also (2).

Mit der Dreiecksungleichung für die Abstandsfunktion dist_M erhält man $r_M(z) = \text{dist}_M(x_0, z)$

$$\leq \text{dist}_M(x_0, x_\varepsilon) + \text{dist}_M(x_\varepsilon, z) = \varepsilon + r_M^\varepsilon(z),$$

also (1) für $z \in U(x)$. Ebenfalls mit der Dreiecksungleichung erhält man (3):

$$\begin{aligned} |s_M^\varepsilon(z) - r_M(z)| &= |r_M^\varepsilon(z) + \varepsilon - r_M(z)| \\ &\leq \varepsilon + |r_M^\varepsilon(z) - r_M(z)| \\ &= \varepsilon + |\text{dist}_M(x_\varepsilon, z) - \text{dist}_M(x, z)| \\ &\leq \varepsilon + \text{dist}_M(x_\varepsilon, x) = 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Wegen $Ds_M^\varepsilon = Dr_M^\varepsilon$ erhält man (4) durch Anwendung des Korollars zu Lemma 3.1. auf den geodätischen Abstand r_M^ε . Wegen $\Delta_M s_M^\varepsilon = \Delta_M r_M^\varepsilon$ erhält man (5) und (6) nach einer einfachen Rechnung aus Satz 3.3. angewandt auf r_M^ε .

3.6. Ein Vergleichssatz für Hesse-Tensoren

Im fünften Kapitel werden wir folgenden Vergleichssatz für Hesse-Tensoren benötigen.

Satz 3.4.:

M und $\hat{M}$ seien endlichdimensionale, vollständige riemannsche

Mannigfaltigkeiten, $\dim M \leq \dim \tilde{M}$. $c : [0, l] \rightarrow M$, $\tilde{c} : [0, l] \rightarrow \tilde{M}$ seien normale Geodätische in M bzw. $\tilde{M}$, die frei von konjugierten Punkten sind. r_M bzw. $r_{\tilde{M}}$ sei der geodätische Abstand in M bzw. $\tilde{M}$ bezüglich $x_0 = c(0)$ bzw. $\tilde{x}_0 = \tilde{c}(0)$. Für die Schnittkrümmung gelte

$$(1) S_{\tilde{M}}(\tilde{c}(t))(\tilde{u}, \tilde{v}) \geq S_M(c(t))(u, v) \quad \forall t \in [0, l] \text{ und orthogonale}$$

$\tilde{u}, \tilde{v} \in T_{\tilde{c}(t)}\tilde{M}$; $u, v \in T_{c(t)}M$. $f : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine nicht fallende C^∞ -Funktion, dann gilt:

$$(2) H_{f(r_{\tilde{M}})} \circ \tilde{c}(t) \leq H_{f(r_M)} \circ c(t) \quad \forall t \in [0, l], \text{ d.h.}$$

für alle $\tilde{u} \in T_{\tilde{c}(t)}\tilde{M}$, $u \in T_{c(t)}M$ mit $\langle \tilde{u}, \dot{\tilde{c}}(t) \rangle_{\tilde{M}} = \langle u, \dot{c}(t) \rangle_M$ und

$$\|\tilde{u}\|_{\tilde{M}} = \|u\|_M \text{ gilt: } H_{f(r_{\tilde{M}})}(\tilde{u}, \tilde{u}) \leq H_{f(r_M)}(u, u).$$

Insbesondere gilt für die kleinsten Eigenwerte λ von $H_{f(r_M)}$ bzw. $\tilde{\lambda}$ von $H_{f(r_{\tilde{M}})}$:

$$(3) \lambda \circ c(t) \geq \tilde{\lambda} \circ \tilde{c}(t) \quad \forall t \in [0, l]$$

Beweis: Der Beweis verläuft analog zur Argumentation im Beweis von Satz 3.2.; man vgl. R.E. Greene, H. Wu [22], Theorem A, S. 18 und Remarks 2.3., S. 20, sowie den Beweis S. 21-24.

Die Abschätzung der kleinsten Eigenwerte erhält man aus (2), indem man als $\tilde{u}$ bzw. u die entsprechenden normierten Eigenvektorfelder längs geeignet konstruierten Geodätischen $\tilde{c}$ bzw. c einsetzt.

4. Ein analytischer Beweis des Satzes von Yau

In diesem Kapitel werden wir einen analytischen Beweis, das heißt einen Beweis mit Methoden der reellen Analysis, wie sie in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen benutzt werden, des folgenden Liouville-Satzes führen

Satz 4.1. (S.T. Yau [66], S. 217):

M sei eine m-dimensionale, vollständige, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht negativer Ricci-Krümmung, dann gilt:

Jede einseitig beschränkte, harmonische Funktion $u \in C^2(M)$ ist konstant.

Während S.T. Yau den Beweis dieses Satzes über eine mittels eines Maximalprinzips gewonnene Gradientenabschätzung erhält, werden wir für große $p > 0$ die L^p -Normen geeigneter Hilfsfunktionen, die ebenfalls den Gradienten von u enthalten, so abschätzen, daß wir im Grenzwert $p \rightarrow \infty$ eine Abschätzung der L^∞ -Norm des Gradienten erhalten. Diese Idee, den Yauschen Satz mittels L^p -Abschätzungen zu beweisen, geht nach S.T. Yau [69], S. 14, zurück auf R. Schoen. In [69], S. 14/15, gibt Yau eine kurze Skizze des Beweises. Da diese Beweisidee in der sonstigen Literatur nicht aufgegriffen wird, soll der Beweis hier detailliert dargestellt werden. Darüber hinaus zeigt er eine methodische Alternative zu der im fünften Kapitel verwendeten Beweistechnik für den Fall harmonischer Funktionen auf.

4.1. Bezeichnungen und Hilfsmittel

Für ein Vektorfeld w auf der m-dimensionalen riemannschen Mannigfaltigkeit M mit Levi-Civita-Zusammenhang M_∇ definiert man (vgl. S. Kobayashi, K. Nomizu [50], S. 338) die Divergenz durch

$$(56) \operatorname{div} w := \operatorname{Sp}_M(v \rightarrow M_\nabla v w)$$

Für das Gradientenfeld Du einer Funktion $u : M \rightarrow \mathbb{R}$ gilt (vgl. Anhang, Hilfssatz 6)

$$(57) \operatorname{div} Du = \operatorname{Sp}_M(v \rightarrow {}^M \nabla_v Du) = \Delta_M u ,$$

und für zwei (hinreichend oft differenzierbare) Funktionen u, v , auf M hat man

$$(58) \operatorname{div} (v Du) = \langle Dv, Du \rangle + v \Delta_M u .$$

Für die Divergenz eines Vektorfeldes gilt der folgende Integralsatz:

Satz 4.2. (Variante des Gaußschen Divergenzsatzes):

Sei M eine nicht notwendig orientierte, m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit; v sei ein fast überall (im Sinne des Lebesgue-Maßes auf M) lipschitz-stetiges Vektorfeld auf M mit kompaktem Träger im Inneren von M . Dann gilt

$$\int_M \operatorname{div} v \, d\operatorname{vol}_M = 0 .$$

Dabei ist $d\operatorname{vol}_M$, das Volumenelement auf M , in lokalen Koordinaten gegeben durch $d\operatorname{vol}_M = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_m$.

Beweis: Für differenzierbare Vektorfelder v folgt die Aussage aus G. de Rham [57], S. 26 und L. Karp [44], S. 488.

Die Ausdehnung auf lipschitz-stetige Vektorfelder erhält man, indem man die Integration mit Hilfe eines Überdeckungsarguments (nach Voraussetzung hat das Vektorfeld v einen kompakten Träger in M) zurückführt auf Integrationen bezüglich lokaler Karten (also Integrationen im $\mathbb{R}^m$) aus H. Federer [13], S. 478, 4.5.6. (5) mittels Regularisierung.

Satz 4.2. werden wir, analog zur Situation im $\mathbb{R}^m$, zur "partiellen Integration" auf M benutzen.

Im folgenden Lemma konstruieren wir eine Abschneidefunktion,

mit deren Hilfe wir später "geeignete" Vektorfelder mit kompaktem Träger in M (wie in Satz 4.2. gefordert) erhalten.

Lemma 4.1.:

M sei eine vollständige, m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit $\text{Ric}(M) \geq 0$. Zu $x_0 \in M$ sei $B_R(x_0) \subseteq M$ die geodätische Kugel in M mit Mittelpunkt x_0 und Radius $R > 0$. Sei $\beta \in (0,1)$ eine reelle Konstante, dann gilt:

Es gibt eine Abschneidefunktion $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(1) η ist fast überall differenzierbar auf M ;

(2) $0 \leq \eta(x) \leq 1 \quad \forall x \in M, \text{ supp } \eta \subseteq \bar{B}_R(x_0),$

$$\eta(x) = 1 \text{ für } x \in B_{(1-\beta)R}(x_0);$$

(3) es gibt reelle Konstanten $c = c(m) > 0$ mit

$$\|\Delta \eta(x)\| \leq \frac{c}{\beta R} \text{ fast überall auf } M \text{ und}$$

$$|\Delta_M \eta(x)| \leq \frac{c}{(1-\beta)\beta R^2} \text{ für fast alle } x \in M$$

$$\text{mit } r_M(x) \geq (1-\beta)R.$$

Beweis: Wir konstruieren η mit den geforderten Eigenschaften in zwei Schritten:

1. Sei $\tau : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ definiert durch

$$\tau(s) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq s < (1-\beta)R \\ 1 - \frac{1}{\beta R} [s - (1-\beta)R] & \text{für } (1-\beta)R \leq s < R \\ 0 & \text{für } s \geq R. \end{cases}$$

Es ist nach Konstruktion $0 \leq \tau \leq 1$, und τ ist lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante $\frac{1}{\beta R}$) also fast überall differenzierbar

mit stückweise konstanter Ableitung τ' und

$$(4) \quad |\tau'(s)| \leq \frac{1}{\beta R}.$$

Es existiert also auch fast überall τ'' mit $\tau''(s) = 0$ f.ü., so daß auch höhere Ableitungen f.ü. existieren.

τ ist also fast überall differenzierbar.

2. r_M sei der geodätische Abstand bezüglich $x_0 \in M$. Da $C(x_0) \cup \{x_0\}$ eine Nullmenge in M ist, ist r_M fast überall differenzierbar auf M (vgl. Satz 2.4., Satz 3.1.).

Wir definieren jetzt $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\eta(x) := \tau \circ r_M(x).$$

Als Komposition von τ und r_M erfüllt η die Forderung (1). Wegen $0 \leq \tau \leq 1$ ist $0 \leq \eta \leq 1$; wegen $\text{supp } \tau \subseteq [0, R]$ gilt $\text{supp } \eta \subseteq \{x \in M \mid 0 \leq r_M(x) \leq R\} = \bar{B}_R(x_0)$ und wegen $\tau(s) = 1$ für $s \in [0, (1-\beta)R]$ gilt $\eta(x) = 1$ für $x \in M$ mit $0 \leq r_M(x) < (1-\beta)R$. Also ist Forderung (2) erfüllt.

Es gilt fast überall auf M : $D\eta(x) = \tau'(r_M(x)) Dr_M(x)$ also mit Lemma 3.1. und (4): $\|D\eta(x)\| \leq \frac{1}{\beta R}$. Außerdem gilt fast überall in M :

$$\begin{aligned} \Delta_M \eta(x) &= \text{div}(D\eta)(x) = \tau'(r_M(x)) \Delta_M r_M(x) + \tau''(r_M(x)) \langle Dr_M(x), Dr_M(x) \rangle \\ &= \tau'(r_M(x)) \Delta_M r_M(x) \end{aligned}$$

wegen $\tau'' = 0$ f.ü. und Formel (58). Satz 3.3. gilt also mit (4), da wir in diesem Kapitel $\text{Ric}(M) \geq 0$ voraussetzen:

$$|\Delta_M \eta(x)| = |\tau'(r_M(x))| \cdot |\Delta_M r_M(x)| \leq \frac{1}{\beta R} \frac{m-1}{r_M(x)}; \quad \text{für } r_M(x) \geq (1-\beta)R$$

erhalten wir also:

$$|\Delta_M \eta(x)| \leq \frac{c(m)}{(1-\beta)\beta R^2}. \quad \text{Damit ist Forderung (3) erfüllt.}$$

Wir benötigen später noch folgende Information über das Wachstum des Volumens geodätischer Kugeln in M ;

Lemma 4.2.:

Sei M eine m -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit nicht negativer Ricci-Krümmung.

$B_R(x_0)$ sei eine geodätische Kugel mit Mittelpunkt $x_0 \in M$ und Radius $R > 0$. Dann gilt:

$$\text{vol}(B_R(x_0)) \leq c(m) R^m.$$

Beweis: R.L. Bishop, R.J. Crittenden [2], S. 256/257, Cor. 4.

Bevor wir im nächsten Abschnitt Satz 4.1. beweisen, stellen wir einige der im zweiten Kapitel allgemein eingeführten Bezeichnungen und Formeln für den Spezialfall harmonischer Funktionen $u \in C^2(M)$ (und damit $u \in C^\infty(M)$) zusammen.

Im Fall einer Funktion $u : M \rightarrow \mathbb{R}$, also $N = \mathbb{R}$, erhalten wir für die kovarianten Ableitungen (Def. 2.10.):

$$u_{,i} = u_i = D_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

$$u_{,i,j} = u_{ij} - \Gamma_{ij}^k u_k \quad \text{mit} \quad u_{ij} = D_j D_i u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$$

und entsprechend Formel (46)

$$\Delta_M u = g^{ij} u_{,i,j} = g^{ij} \{ u_{ij} - \Gamma_{ij}^k u_k \}.$$

Für die Energiedichte erhalten wir entsprechend Formel (47)

$$e(u) = \frac{1}{2} g^{ij} u_{,i} u_{,j},$$

für das in (53) angegebene Gradientenfeld gilt

$$(59) \|Du\|^2 = \langle Du, Du \rangle = g^{ij} u_{,i} u_{,j} = 2e(u).$$

Außerdem erhalten wir für die Terme in der Weitzenböck-Formel (Satz 2.6.) nach Definition 2.11.

$$\|w_{\nabla}(du)\|^2 = g^{kl} g^{js} u_{,k'} u_{,l'} u_{,s}$$

$$Q(du) = g^{ij} M_{Ric_{si}} u_j u_s .$$

Betrachtet man speziell riemannsche Normalkoordinaten um einen Punkt $x \in M$, so erhält man in diesem Punkt x (unter Beachtung von (28)):

$$\|w_{\nabla}(du)(x)\|^2 = \sum_{i,j=1}^m (u_{ij}^2(x)) \text{ und } Q(du)(x) = M_{Ric_{ij}}(x) u_i(x) u_j(x)$$

und mit der Weitzenböck-Formel

$$(60) \quad \Delta_M e(u)(x) = \sum_{i,j=1}^m \{ u_{ij}^2(x) + M_{Ric_{ij}}(x) u_i(x) u_j(x) \} \text{ sowie}$$

$$(61) \quad \|Du(x)\|^2 = 2e(u)(x) = \sum_{i=1}^m u_i^2 .$$

4.2. Der Beweis von Satz 4.1.

Wir werden den Beweis von Satz 4.1. in mehrere Abschnitte unterteilt führen.

1. Definition der Hilfsfunktion und Herleitung einer Differentialgleichung für die Hilfsfunktion:

Auf Grund der Voraussetzungen können wir annehmen, daß u nach unten beschränkt ist (sonst betrachte man $v = -u$, mit $\Delta_M u = 0$ gilt auch $\Delta_M v = -\Delta_M u = 0$); es gibt also eine reelle Konstante a mit $u(x) > a$ für alle $x \in M$.

Wir definieren die Hilfsfunktion $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(62) \quad \phi(x) := \frac{e(u)(x)}{(u(x)-a)^2}$$

Nach (59) haben wir $\phi = \frac{1}{2} \frac{\|Du\|^2}{(u-a)^2}$, und wegen $u \in C^2(M)$,

$\Delta_M u = 0$ ist nach dem Regularitätssatz von J. Eells und J.H. Sampson $u \in C^\infty(M)$ also auch $\phi \in C^\infty(M)$. Außerdem gilt $\phi \geq 0$. Durch kovariantes Ableiten erhalten wir

$$(63) \quad \phi_{,i} = \frac{e(u)_{,i}}{(u-a)^2} - 2 \frac{e(u)u_{,i}}{(u-a)^3}$$

$$(64) \quad \begin{aligned} \phi_{,i'j} &= \frac{e(u)_{,i'j}}{(u-a)^2} - 2 \frac{e(u)_{,i}u_{,j}}{(u-a)^3} - 2 \frac{e(u)_{,j}u_{,i}}{(u-a)^3} \\ &\quad + 6 \frac{e(u)u_{,i}u_{,j}}{(u-a)^4} - 2 \frac{e(u)u_{,i'j}}{(u-a)^3} \end{aligned}$$

Aus (63) erhalten wir

$$(65) \quad 2 \frac{e(u)_{,i}u_{,j}}{(u-a)^3} = 2 \frac{\phi_{,i}u_{,j}}{(u-a)} + 4 \frac{e(u)u_{,i}u_{,j}}{(u-a)^4}$$

und die analoge Formel mit vertauschten Indizes i und j . Aus (64) und (65) erhält man insgesamt

$$\begin{aligned} \Delta_M \phi &= g^{ij} \phi_{,i'j} = \frac{g^{ij} e(u)_{,i'j}}{(u-a)^2} - 4 \frac{g^{ij} \phi_{,i}u_{,j}}{(u-a)} - 2 \frac{e(u) g^{ij} u_{,i}u_{,j}}{(u-a)^4} \\ &\quad - 2 \frac{e(u) g^{ij} u_{,i'j}}{(u-a)^3} \\ &= \frac{\Delta_M e(u)}{(u-a)^2} - 4 \frac{\langle D\phi, Du \rangle}{(u-a)} - 4 \frac{e(u)^2}{(u-a)^4} \\ &\quad - 2 \frac{e(u) \Delta_M u}{(u-a)^3}, \end{aligned}$$

also mit $\Delta_M u = 0$ und (59):

$$\begin{aligned}
 \Delta_M \Phi &= \frac{\Delta_M e(u)}{(u-a)^2} - 4 \frac{\langle D\Phi, Du \rangle}{(u-a)} - 4 \frac{e(u)^2}{(u-a)^4} \\
 (66) \quad &= \frac{\Delta_M e(u)}{(u-a)^2} - 4 \frac{\langle D\Phi, Du \rangle}{(u-a)} - \frac{\|Du\|^4}{(u-a)^4}
 \end{aligned}$$

2. Herleitung einer Differentialungleichung für $\Delta_M \Phi$:

Ausgehend von (66) wird jetzt eine punktweise gültige Ungleichung für $\Delta_M \Phi$ hergeleitet.

Sei $x \in M$, und es seien riemannsche Normalkoordinaten um $x \in M$ eingeführt, dann gilt nach (60) und (36):

$$\begin{aligned}
 \Delta_M e(u)(x) &= \sum_{i,j=1}^m \{ u_{ij}^2(x) + {}^M \text{Ric}_{ij}(x) u_i(x) u_j(x) \} \\
 &= \sum_{i,j=1}^m u_{ij}^2(x) + \|Du(x)\|^2 \text{ric}_x(Du(x)).
 \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist die Ricci-Krümmung von M nicht negativ, also gemäß Definition 2.3. $\text{ric}_x(Du(x)) \geq 0$ und damit

$$(67) \quad \Delta_M e(u)(x) \geq \sum_{i,j=1}^m u_{ij}^2(x)$$

$$(68) \quad \Delta_M \Phi(x) \geq \sum_{i,j=1}^m \frac{u_{ij}^2(x)}{(u-a)^2} - \sum_{i,j=1}^m \frac{(u_i^2(x))(u_j^2(x))}{(u-a)^4} - 4 \frac{\langle D\Phi(x), Du(x) \rangle}{(u-a)}$$

Zur weiteren Abschätzung von $\sum_{i,j=1}^m u_{ij}^2(x) = \sum_{i,j=1}^m (u_{ij}(x))^2$

wählt man eine ON-Basis in $T_x M, \{E_1, \dots, E_m\}$, so daß gilt

$$u_1(x) E_1 = Du(x)$$

$$u_i(x) = 0, \quad 2 \leq i \leq m$$

$$\text{also } e(u)(x) = \frac{1}{2} u_1^2(x), \quad \Delta_M u(x) = \sum_{i=1}^m u_{ii}(x)$$

und die dieser Basis zugeordneten riemannschen Normalkoordinaten um $x \in M$.

Allgemein gilt für $e(u) = \frac{1}{2} g^{kl} u_k u_l$:

$$e(u)_{,i} = \frac{1}{2} g^{kl} \{ u_{,k,i} u_{,l} + u_{,k} u_{,l,i} \}$$

also speziell mit $g^{kl} = \delta_{kl}$:

$e(u)_{,i} = u_{,i} u_{,i}$. In unserem speziell gewählten Koordinatensystem erhalten wir (mit (63)) im Punkt $x \in M$:

$$\begin{aligned} \phi_{,i} u_{,i} &= \phi_{,1} u_{,1} = \frac{e(u)_{,1} u_{,1}}{(u-a)^2} - 2 \frac{e(u) u_{,1}^2}{(u-a)^3} \\ &= \frac{u_{,1}^2 u_{,1,i}}{(u-a)^2} - 4 \frac{e(u)^2}{(u-a)^3} \\ &= 2 \frac{e(u) u_{11}}{(u-a)^2} - 4 \frac{e(u)^2}{(u-a)^3} \end{aligned}$$

und damit in $x \in M$

$$\frac{\phi_{,i} u_{,i}}{(u-a)} = \frac{\phi_{,1} u_{,1}}{(u-a)} = 2\phi \frac{u_{11}}{(u-a)} - 4\phi^2 \text{ oder}$$

$$\frac{\phi u_{11}}{(u-a)} = \frac{1}{2} \frac{\phi_{,i} u_{,i}}{(u-a)} + 2\phi^2.$$

Andererseits erhalten wir

$$\frac{\phi u_{11}}{(u-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \phi^2 + \frac{1}{2\varepsilon} \frac{u_{11}^2}{(u-a)^2}$$

und damit in $x \in M$ mit $\varepsilon = 2$

$$(69) \quad \frac{u_{11}^2(x)}{(u-a)^2} \geq \frac{\phi_{,i} u_{,i}}{(u-a)} + 4\phi^2$$

In $x \in M$ ist $\phi, u, i = \phi_i u_i = \langle D\phi(x), Du(x) \rangle$; außerdem schätzen wir ab:

$$(70) \quad \sum_{i,j=1}^m (u_{ij}(x))^2 \geq \sum_{i=1}^m (u_{ii}(x))^2 = u_{11}^2(x) + \sum_{i=2}^m (u_{ii}(x))^2$$

$$(71) \quad \sum_{i=2}^m u_{ii}(x) = \sum_{i=2}^m 1 \cdot u_{ii}(x) \leq \sqrt{m-1} \left(\sum_{i=2}^m (u_{ii}(x))^2 \right)^{1/2} \text{ also}$$

$$(72) \quad \sum_{i=2}^m (u_{ii}(x))^2 \geq \frac{\left(\sum_{i=2}^m u_{ii}(x) \right)^2}{m-1} = \frac{(\Delta_M u(x) - u_{11}(x))^2}{m-1} = \frac{u_{11}^2(x)}{m-1},$$

aus (70) bis (72) folgt also

$$(73) \quad \sum_{i,j=1}^m (u_{ij}(x))^2 \geq \frac{m}{m-1} u_{11}^2(x).$$

$$\text{Unter Beachtung von } \sum_{i,j=1}^m \frac{(u_i^2(x))(u_j^2(x))}{(u-a)^4} = \frac{\|Du(x)\|^4}{(u-a)^4} = \phi^2(x)$$

erhalten wir mit (68), (69) und (73):

$$(74) \quad \Delta_M \phi(x) \geq \frac{4}{m-1} \phi^2(x) + 2 \left[\frac{m}{m-1} - 2 \right] \frac{\langle D\phi(x), Du(x) \rangle}{(u-a)}$$

für alle $x \in M$.

3. Lokalisierung und Herleitung einer Ungleichung für lokale L^p -Normen von ϕ :

Aus (74) erhält man durch Umstellung und Multiplikation mit $\eta^{2p_\phi p-2}$, wobei η die Abschneidefunktion aus Lemma 4.1. ist:

$$(75) \quad \frac{4}{m-1} \eta^{2p_\phi p} \leq \eta^{2p_\phi p-2} \Delta_M \phi + 2 \left[2 - \frac{m}{m-1} \right] \eta^{2p_\phi p-2} \frac{\langle D\phi, Du \rangle}{(u-a)}.$$

Integration über M (genauer über $\text{supp } \eta \subseteq B_R(x_0)$) führt zu

$$(76) \quad \frac{4}{m-1} \int_M \eta^{2p_\phi p} d\text{vol} \leq \int_M \eta^{2p_\phi p-2} \Delta_M \phi d\text{vol}$$

$$+ 2[2 - \frac{m}{m-1}] \int_M \eta^{2p_\Phi p-2} \frac{\langle D\Phi, Du \rangle}{(u-a)} dvol.$$

Die Terme der rechten Seite von (76) werden im folgenden einzeln abgeschätzt:

Zunächst gilt für beliebiges $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} (77) \quad \int_M \eta^{2p_\Phi p-2} \frac{\langle D\Phi, Du \rangle}{(u-a)} dvol &\leq \int_M \eta^{2p_\Phi p-3} \{ \|D\Phi\| \frac{\|Du\|}{(u-a)} \Phi \} dvol \\ &\leq \frac{1}{2\epsilon} \int_M \eta^{2p_\Phi p-3} \|D\Phi\|^2 dvol \\ &\quad + \frac{1}{2} \epsilon \int_M \eta^{2p_\Phi p} dvol . \end{aligned}$$

Mit Satz 4.2. und (58) gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \operatorname{div}(\eta^{2p_\Phi p-2} D\Phi) dvol = \int_M \eta^{2p_\Phi p-2} \Delta_M \Phi dvol \\ &\quad + 2p \int_M \eta^{2p-1} \Phi^{p-2} \langle D\eta, D\Phi \rangle dvol \\ &\quad + (p-2) \int_M \eta^{2p_\Phi p-3} \langle D\Phi, D\Phi \rangle dvol \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} (78) \quad \int_M \eta^{2p_\Phi p-2} \Delta_M \Phi dvol &= (2-p) \int_M \eta^{2p_\Phi p-3} \|D\Phi\|^2 dvol \\ &\quad - 2p \int_M \eta^{2p-1} \Phi^{p-2} \langle D\eta, D\Phi \rangle dvol . \end{aligned}$$

Ebenso erhält man aus

$$0 = \int_M \operatorname{div}(\eta^{2p-1} \Phi^{p-1} D\eta) dvol$$

die Gleichung

$$(79) \int_M \eta^{2p-1} \phi^{p-2} \langle D\eta, D\phi \rangle \, d\text{vol} = - \frac{2p-1}{p-1} \int_M \eta^{2p-2} \phi^{p-1} \|D\eta\|^2 \, d\text{vol} \\ - \frac{1}{p-1} \int_M \eta^{2p-1} \phi^{p-1} \Delta_M \eta \, d\text{vol} .$$

Aus (76) bis (79) ergibt sich unter Beachtung von

$$0 \leq 2 - \frac{m}{m-1} \leq 2 ;$$

$$\eta^{2p-1}(x) = \eta(x) \eta^{2p-2}(x) \leq \eta^{2p-2}(x), \text{ da } 0 \leq \eta(x) \leq 1 ;$$

$$\frac{2p-1}{p-1} \leq 3 \text{ und } \frac{2p}{p-1} \leq 3 \text{ f\"ur } p \geq 2$$

die Abschätzung

$$(80) \frac{4}{m-1} \int_M \eta^{2p} \phi^p \, d\text{vol} \leq 2\epsilon \int_M \eta^{2p} \phi^p \, d\text{vol} \\ + \left[\frac{2}{\epsilon} + (2-p) \right] \int_M \eta^{2p} \phi^{p-3} \|D\phi\|^2 \, d\text{vol} \\ + 6p \int_M \eta^{2(p-1)} \phi^{p-1} \|D\eta\|^2 \, d\text{vol} \\ + 3 \int_M \eta^{2(p-1)} \phi^{p-1} |\Delta_M \eta| \, d\text{vol} .$$

Wir setzen jetzt $\epsilon = \frac{\epsilon}{2(m-1)}$ und erhalten für $p > 2m$ (dann ist

$$\frac{2}{\epsilon} + (2-p) < \frac{2}{3}(1-m) < 0):$$

$$\int_M \eta^{2p} \phi^p \, d\text{vol} \leq 6(m-1)p \int_M \eta^{2(p-1)} \phi^{p-1} \|D\eta\|^2 \, d\text{vol} \\ + 3(m-1) \int_M \eta^{2(p-1)} \phi^{p-1} |\Delta_M \eta| \, d\text{vol} .$$

Mit der Hölder-Ungleichung schätzen wir ab zu

$$(81) \int_M \eta^{2p_\Phi p} d\text{vol} \leq 6(m-1)p \left\{ \int_M \eta^{2p_\Phi p} d\text{vol} \right\}^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_M \|D\eta\|^{2p} d\text{vol} \right\}^{1/p} \\ + 3(m-1) \left\{ \int_M \eta^{2p_\Phi p} d\text{vol} \right\}^{1-\frac{1}{p}} \left\{ \int_M |\Delta_M \eta|^p d\text{vol} \right\}^{1/p}$$

also mit Lemma 4.1. (3), (4) unter Beachtung von

$$\Delta_M \eta = 0 \text{ in } B_{(1-\beta)R}(x_0):$$

$$\left\{ \int_M \eta^{2p_\Phi p} d\text{vol} \right\}^{1/p} \leq 6(m-1)p \frac{c^2}{\beta^2 R^2} \{\text{vol } B_R(x_0)\}^{1/p} \\ + 3(m-1) \frac{c(m)}{(1-\beta)\beta R^2} \{\text{vol } B_R(x_0)\}^{1/p}$$

oder wegen $\eta \equiv 1$ in $B_{(1-\beta)R}(x_0)$ und Lemma 4.2.

$$(82) \|\Phi\|_{L^p(B_{(1-\beta)R}(x_0))} \leq \frac{c(m, \beta)}{R} R^{n/p} \left[\frac{p}{R} + \frac{1}{R} \right]$$

4. Grenzübergang zur Abschätzung der L^∞ -Norm:

Wir wählen eine monoton wachsende Folge $\{R_v\}$, $R_v \uparrow +\infty$, mit $R_1 > m$ und setzen $p_v := 2R_v$.

Also ist $\{p_v\}$ eine monoton wachsende Folge, $p_v \uparrow +\infty$, mit

$$p_v \geq p_1 > 2m \text{ und } \frac{p_v}{R_v} = 2.$$

Für jedes Paar (p_v, R_v) gilt die Abschätzung (82), also

$$\|\Phi\|_{L^{p_v}(B_{(1-\beta)R_v}(x_0))} \leq \frac{3c(m)}{R_v} R_v^{n/R_v}$$

also wegen $p_v = 2R_v$:

$$(83) \quad \|\phi\|_{L^{p_v}_{(B_{(1-\beta)R_v}(x_0))}} \leq \frac{3c(m)}{R_v} \left(\frac{1}{2}\right)^{n/p_v} (p_v \sqrt{p_v})^n.$$

Wegen $\lim_{v \rightarrow \infty} p_v \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = 1$, $\lim_{v \rightarrow \infty} p_v \sqrt{p_v} = 1$, $R_v \uparrow + \infty$ gilt:

Für $v \geq v_0$ existiert eine Konstante $c_0 = c_0(m, v_0)$ mit

$$\|\phi\|_{L^{p_v}_{(B_{(1-\beta)R_v}(x_0))}} \leq c_0 \quad \forall v \geq v_0,$$

damit folgt $\phi \in L^\infty(M)$ und mit $v \rightarrow \infty$ in (83):

$$\|\phi\|_{L^\infty(M)} = 0$$

also $\phi \equiv 0$ in M .

Wegen $\phi = \frac{1}{2} \frac{\|Du\|^2}{(u-a)^2}$ gilt also $Du \equiv 0$ in M und damit, weil M zusammenhängend ist, $u \equiv \text{const.}$ in M .

5. Liouville-Sätze für harmonische Abbildungen und Funktionen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten mit partiell negativer Ricci-Krümmung

In diesem Kapitel verallgemeinern wir die Liouville-Sätze von S.T. Yau [66], S.Y. Cheng [7] und H.I. Choi [9].

Dabei betrachten wir Urbildmannigfaltigkeiten M , deren Ricci-Krümmung generell nach unten beschränkt ist, also

$$\text{Ric}(M) \geq R_M \text{ mit } R_M \in \mathbb{R}$$

(R_M ist i.a. negativ) erfüllt und außerhalb einer beschränkten Teilmenge $\Omega \subset M$ nicht negativ ist.

Bezüglich der Schnittkrümmung der Bildmannigfaltigkeiten N lassen wir zwei verschiedene Situationen zu:

Wir betrachten zum einen Bildmannigfaltigkeiten N mit nicht positiver Schnittkrümmung und zum anderen Bildmannigfaltigkeiten N mit nach oben durch eine positive Konstante beschränkter Schnittkrümmung.

5.1. Einführung, Zusammenfassung der Hauptergebnisse und eine Skizze der Beweisidee

Für $u \in C^2(M, N)$ definieren wir das verallgemeinerte Gradientenfeld Du jeweils in entsprechenden lokalen Koordinaten durch

$$Du := (Du^1, \dots, Du^n)$$

wobei Du^α , $1 \leq \alpha \leq n$, das Gradientenfeld von $u^\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist. Wir haben für $x \in M$

$$\|Du(x)\|^2 := \gamma_{\alpha\beta}(u(x)) g^{ij}(x) u^\alpha_i(x) u^\beta_j(x) = 2e(u)(x)$$

als Beziehung zwischen der Energiedichte $e(u)$ und der Norm des verallgemeinerten Gradientenfelds Du .

Zunächst werden die Hauptergebnisse dieses Kapitels genannt. Im Anschluß daran skizzieren wir die diesen Ergebnissen gemeinsame Beweisidee, ohne die jeweiligen speziellen technischen Details zu erörtern. Die Beweismethode knüpft an S.Y. Chengs [7] Methode zum Beweis des Yauschen Liouville-Satzes an; eine Diskussion dieses speziellen Beweises findet man auch bei H. Wu [63], S. 123 f.

Die Hauptergebnisse sind folgende Sätze:

Satz 5.1.:

M sei eine m -dimensionale, vollständige, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gebe eine beschränkte Teilmenge $\Omega \subseteq M$, so daß die Ricci-Krümmung von M außerhalb Ω nicht negativ ist, also

$$(1) \operatorname{ric}_x(v) \geq 0 \quad \forall x \in M \setminus \Omega, v \in T_x M$$

N sei eine n -dimensionale, vollständige, einfach zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung überall nicht positiv ist, also

$$(2) S_N(z), (v, w) \leq 0 \quad \forall z \in N, v, w \in T_z N \text{ mit } \langle v, w \rangle_N = 0.$$

Sei $x_0 \in M$ ein beliebiger aber fester Referenzpunkt in M und r_M der zugehörige geodätische Abstand; entsprechend sei $z_0 \in N$ ein beliebiger aber fester Referenzpunkt in N und r_N der zugehörige geodätische Abstand. $B_a(x_0) \subseteq M$ bezeichne die geodätische Kugel in M mit Mittelpunkt x_0 und Radius a .

Dann gilt:

Jede harmonische Abbildung $u \in C^2(M, N)$, die der Wachstumsbedingung

$$(3) \limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{\sqrt{a}} = 0$$

mit $S(a) := \sup\{ r_N \circ u(x) \mid x \in \bar{B}_a(x_0) \}$ genügt, ist konstant.

Satz 5.2.:

M sei eine m -dimensionale, vollständige, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, $x_0 \in M$ ein beliebiger Referenzpunkt. Es gebe eine beschränkte Teilmenge $\Omega \subseteq M$, so daß der Ricci-Tensor von M außerhalb Ω positiv definit ist, also

$$(1) \operatorname{ric}_x(v) \geq R_M \|v\|^2 \quad \forall x \in M \setminus \Omega, \quad v \in T_x M,$$

mit einer reellen Konstanten $R_M > 0$.

N sei eine n -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung nach oben durch eine positive reelle Konstante S_N beschränkt ist, also

$$(2) S_N(z)(v, w) \leq S_N \quad \forall z \in N, \quad v, w \in T_z N.$$

Dann gilt:

Jede harmonische Abbildung $u \in C^2(M, N)$, die der Wachstumsbedingung

$$(3) \limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{\sqrt{a}} = 0$$

mit $S(a) := \sup\{ r_N \circ u(x) \mid x \in \bar{B}_a(x_0) \}$ genügt und deren Energiedichte die Abschätzung

$$(4) \sup_{x \in M \setminus \Omega} e(u)(x) \leq \frac{R_M}{2S_N}$$

erfüllt, ist konstant.

Satz 5.3.:

M sei eine m -dimensionale, vollständige, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gebe eine beschränkte Teilmenge $\Omega \subseteq M$, so daß die Ricci-Krümmung von M außerhalb Ω nicht negativ ist, also

$$(1) \operatorname{ric}_x(v) \geq 0 \quad \forall x \in M \setminus \Omega, v \in T_x M.$$

N sei eine n -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung nach oben durch eine positive reelle Konstante K beschränkt ist, also

$$(2) S_N(z)(v,w) \leq K \quad \forall z \in N, v, w \in T_z N.$$

Sei $z_0 \in N$ ein beliebiger aber fester Referenzpunkt in N , $B_R(z_0)$ sei die geodätische Kugel in N mit Mittelpunkt z_0 und Radius R . $B_R(z_0)$ sei disjunkt zum Schnittort von z_0 in N .

Dann gilt:

Jede harmonische Abbildung $u \in C^2(M, N)$, deren Bild der Kleinheitsbedingung

$$(3) u(M) \subseteq B_R(z_0) \text{ mit } R < \frac{\pi}{2\sqrt{K}}$$

genügt, ist konstant.

Bevor wir eine ausführliche Beweisskizze geben, machen wir noch folgende

Bemerkung:

1. Satz 5.1. verallgemeinert den Satz von S.Y. Cheng [7] und weiter spezialisiert (vgl. Abschnitt 5.2., Korollar 5.1.) den Satz von S.T. Yau [66]. Die im Vergleich zu S.Y. Cheng schwächere Wachstumsbedingung, $\limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{\sqrt{a}} = 0$ statt

statt $\limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{a} = 0$, folgt aus der Abschätzung für $\Delta_M(r_M^2)$.

Ein ähnliches aber nicht nur hinsichtlich der Voraussetzungen

an die Krümmungen schwächeres Ergebnis wie in Satz 5.2. findet man bei J. Eells, L. Lemaire [12], S. 12(3.15).

Satz 5.3. verallgemeinert die Aussage von H.I. Choi [9]; die Kleinheitsbedingung entspricht der Bedingung von S. Hildebrandt, J. Jost, K.-O. Widman [30].

2. Nach dem Regularitätssatz bei J. Eells, J.H. Sampson [11] (vgl. Kapitel 1 dieser Arbeit) ist die harmonische Abbildung $u \in C^2(M, N)$ automatisch in $C^\infty(M, N)$. Wir haben also bezüglich u keine Probleme mit der Differenzierbarkeit.
3. Nach dem Satz von Hopf und Rinow (Satz 2.1.) ist die in der vollständigen riemannschen Mannigfaltigkeit M enthaltene, beschränkte Teilmenge $\Omega \subseteq M$ relativ kompakt, also ist $\bar{\Omega}$ kompakt.

Unter Vernachlässigung der technischen Details geben wir zunächst eine

Skizze der Beweisidee:

Wir betrachten eine mit Hilfe einer Abschneidefunktion, die den geodätischen Abstand r_M enthält, und der Energiedichte $e(u)$ konstruierte Familie von Hilfsfunktionen ϕ_a mit folgenden Eigenschaften:

Für jeden reellen Parameter $a (a > 0)$ ist $\phi_a : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht negative, stetige Funktion mit kompaktem Träger.

Dabei ist $\bar{T}_a = \text{supp } \phi_a \subseteq M \cap \Omega$ eine beschränkte Menge mit nicht leerem, zusammenhängendem Inneren und $T_a \uparrow T_\infty = \bigcup_a T_a$ für $a \rightarrow \infty$,

T_∞ ist eine zusammenhängende, offene Teilmenge von $M \cap \Omega$.

Nach Konstruktion gilt auch $\phi_a \equiv 0$ auf ∂T_a , dem Rand von T_a . Die stetige Funktion ϕ_a nimmt auf dem Kompaktum $\bar{T}_a$ ihr Maximum an.

Dabei ist wesentlich, daß die Abschneidefunktion so konstruiert wird, daß $\phi_a \equiv 0$ ist in Ω , also dort, wo wir das Vorzeichen

der Ricci-Krümmung nicht kontrollieren können; es soll also $\bar{T}_a = \text{supp } \phi_a \subseteq M \setminus \Omega$ gelten. Außerdem ist ϕ_a so konstruiert, daß aus $\phi_a \equiv 0$ in T_a (bzw. M) $Du \equiv 0$ in T_a (bzw. M) folgt.

Hinsichtlich des Maximums der Funktion ϕ_a unterscheiden wie zwei Fälle.

1. Fall:

Das Maximum von ϕ_a wird in einem Randpunkt $x \in \partial T_a$ angenommen.

Dann gilt nach Konstruktion $\phi_a \equiv 0$ in $\bar{T}_a$ und damit $Du \equiv 0$ in $T_a (\neq \emptyset)$. Wegen des Zusammenhangs von T_a ist dann $u \equiv \text{const.}$ in T_a ; T_a ist eine nicht leere, offene Teilmenge von M .

2. Fall:

Das Maximum von ϕ_a wird in einem inneren Punkt $\bar{x} \in T_a$ angenommen.

Dann nutzen wir die beiden einfachsten Tatsachen über das Verhalten reellwertiger Funktionen auf M in ihrem Maximalpunkt $\bar{x} \in T_a \subseteq M$ aus, nämlich:

Wenn ϕ_a in $\bar{x}$ differenzierbar ist, gilt

(1) $\bar{x}$ ist kritischer Punkt von ϕ_a , also $D\phi_a(\bar{x}) = 0$;

(2) der Hesse-Tensor H_{ϕ_a} ist an der Stelle $\bar{x} \in T_a \subseteq M$ negativ semidefinit, also insbesondere

$$\Delta_M \phi_a(\bar{x}) = \text{Sp}_M H_{\phi_a}(\bar{x}) \leq 0.$$

Fall 2a: Wir nehmen zunächst die Differenzierbarkeit von ϕ_a in $\bar{x}$ an.

Aus den beiden Informationen (1), (2) leiten wir eine Abschätzung für $\phi_a(\bar{x})$ nach oben her, so daß für beliebige $x \in T_a$ gilt:

$$\phi_a(x) \leq \phi_a(\bar{x}) \leq f_1(a).$$

In diese Abschätzung gehen u.a. die Abschätzungen für den geodätischen Abstand (Satz 3.3.) und die Krümmungsvoraussetzungen ein. Dabei ist wichtig, daß $\bar{x} \in M \cap \Omega$ ist, denn nur dort können wir nach Voraussetzung das Vorzeichen der Ricci-Krümmung kontrollieren.

Aus dieser ersten Abschätzung gewinnen wir schließlich eine Abschätzung für die Energiedichte in einem beliebigen Punkt $x \in T_a$:

$$e(u)(x) \leq f_2(a)$$

mit von a unabhängiger linker Seite und einer Funktion f_2 , so daß unter unseren Voraussetzungen $f_2(a) \rightarrow 0$ für $a \rightarrow \infty$ gilt. Somit erhalten wir wegen $T_a \uparrow T_\infty$ und $\|Du\|^2 = 2e(u)$ für $x \in T_\infty$:

$Du(x) = 0$; also ist $Du \equiv 0$ in T_∞ und damit $u \equiv \text{const.}$ in T_∞ . T_∞ ist eine (unbeschränkte) offene Teilmenge von M .

Fall 2b: Die Funktion ϕ_a ist in $\bar{x} \in T_a \subseteq M$ nicht differenzierbar.

Dieser Fall kann eintreten, da wir a priori nicht garantieren können, daß die Maximalstelle $\bar{x}$ von ϕ_a in $\exp_{x_0}(E(x_0)) \subseteq M$ liegt. Es ist also möglich, daß $\bar{x}$ in $C(x_0)$, dem Schnittort von x_0 in M liegt. Dort ist der geodätische Abstand r_M bezüglich x_0 i.a. nicht differenzierbar (vgl. Satz 3.1. und Bemerkung zu Satz 3.1.); dies gilt dann auch für die Hilfsfunktion ϕ_a , die mittels r_M konstruiert wird.

Falls ϕ_a in $\bar{x}$ nicht differenzierbar ist, ersetzen wir ϕ_a durch eine in einer Umgebung $U(\bar{x})$ definierte Ersatzfunktion ϕ_a^ε , die analog zu ϕ_a konstruiert wird; jedoch wird dabei der geodätische Abstand r_M durch die in $\bar{x}$ differenzierbare Support-Funktion s_M^ε ersetzt (vgl. Abschnitt 3.5., Lemma 3.4.). Es wird gezeigt, daß diese Ersatzfunktion ϕ_a^ε ebenfalls in $\bar{x} \in M$ ihr Maximum hat und daß $\phi_a^\varepsilon(\bar{x}) = \phi_a(\bar{x})$ gilt.

Wir erhalten also eine Abschätzung für $\phi_a(\bar{x})$, wenn wir $\phi_a^e(\bar{x})$ abschätzen können. Da s_M^e denselben Abschätzungen wie r_M genügt (Lemma 3.4., Satz 3.3.), bekommen wir die gewünschte Abschätzung für $\phi_a^e(\bar{x})$ analog zum Vorgehen im Fall 2a bei der Abschätzung von $\phi_a(\bar{x})$. Zur Aussagen $u \equiv \text{const.}$ in $T_\infty \subseteq M$ führen dann dieselben Überlegungen wie im Fall 2a.

Zusammenfassend endet die Diskussion aller Fälle mit folgender Aussagen:

$u \equiv \text{const.}$ in einer offenen Teilmenge von M .

Nach J.H. Sampson [58], Theorem 1, S. 213 gilt

Lemma 5.1.:

Seien M und N riemannsche Mannigfaltigkeiten, M sei zusammenhängend.

$u_1, u_2 \in C^2(M, N)$ seien harmonische Abbildungen, dann gilt:

- (1) Falls $u_1 = u_2$ in einer offenen Teilmenge von M ist, dann ist $u_1 = u_2$ auf ganz M .
- (2) Falls $u_1(x) = u_2(x)$ von unendlicher Ordnung in $x \in M$, dann ist $u_1 = u_2$ auf ganz M .
- (3) Jede harmonische Abbildung, die auf einer offenen Teilmenge von M konstant ist, ist eine konstante Abbildung.

Beweis: Anwendung des Carleman-Aronszajnschen Fortsetzungssatzes, siehe J.H. Sampson [58], S. 212/213.

In unserer Situation erhalten wir aus Teil (3) des Lemmas 5.1.: u ist eine konstante Abbildung auf ganz M .

5.2. Konstruktion der Abschneidefunktionen

Nach Voraussetzung ist $\Omega \subseteq M$ beschränkte Teilmenge von M , es existiert also zu dem beliebig aber fest gewählten Referenzpunkt $x_0 \in M$ eine reelle Konstante $R_0 > 0$, so daß gilt:

$$(84) \quad \Omega \subseteq B_{R_0}(x_0) \subseteq M.$$

Dabei ist $B_{R_0}(x_0) = \{ x \in M \mid r_M(x) < R_0 \}$ die geodätische Kugel in M mit Mittelpunkt x_0 und Radius R_0 ; r_M ist der geodätische Abstand bezüglich x_0 .

Für jede reelle Zahl $a > R_0$ definieren wir

$$(85) \quad T_a(M) := \{ x \in M \mid R_0 < r_M(x) < a \}$$

$$(86) \quad \partial T_a(M) := \{ x \in M \mid r_M(x) = R_0 \} \cup \{ x \in M \mid r_M(x) = a \}.$$

Nach dem Satz von Hopf und Rinow (Satz 2.1.) ist $T_a(M) \subseteq M$ eine relativ kompakte Teilmenge, $\bar{T}_a(M)$ ist also kompakt; $\partial T_a(M)$ ist der Rand von $T_a(M)$. $\bar{T}_a(M)$ soll der Träger der zu konstruierenden Abschneidefunktion werden.

Definition 5.1.:

Für jede reelle Zahl $a > R_0$ definieren wir die Funktion $\tilde{\eta}_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\eta}_a(t) := \begin{cases} \left[\left(\frac{a-R_0}{2} \right)^2 - \left(t - \frac{a+R_0}{2} \right)^2 \right]^2 & \text{für } R_0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir führen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$A = A(a) := \frac{a-R_0}{2}, \quad B = B(a) := \frac{a+R_0}{2},$$

damit ist also

$$\tilde{\eta}_a(t) = \begin{cases} [A^2 - (t - B)^2]^2 & \text{für } R_0 \leq t \leq a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Nach Konstruktion gilt:

$$(87) \quad \text{supp } \tilde{\eta}_a = [R_0, a], \quad \tilde{\eta}_a \in C_0^1(\mathbb{R}), \quad \tilde{\eta}_a \in C^\infty((R_0, a)),$$

$$\tilde{\eta}_a(R_0) = \tilde{\eta}_a(a) = 0, \quad 0 \leq \tilde{\eta}_a(t) \leq A(a)^4 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Mit Hilfe der Funktionen $\tilde{\eta}_a$ und des geodätischen Abstands r_M können wir jetzt die Abschneidefunktionen definieren,

Definition 5.2.:

r_M sei der geodätische Abstand bezüglich $x_0 \in M$, für jede reelle Zahl $a > R_0$ sei $\tilde{\eta}_a$ die Funktion aus Definition 5.1., dann definieren wir die Abschneidefunktionen $\eta_a : M \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\eta_a(x) := \tilde{\eta}_a \circ r_M(x)$$

Als Komposition stetiger Funktionen (vgl. Satz 3.1.) ist η_a stetig auf M . Mit den Bezeichnungen von Definition 5.1. haben wir

$$\eta_a(x) = \begin{cases} \left[\left(\frac{a-R_0}{2} \right)^2 - \left(r_M(x) - \frac{a+R_0}{2} \right)^2 \right]^2 & \text{für } R_0 \leq r_M(x) \leq a \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und es gilt nach Konstruktion

$$\begin{aligned} \text{supp } \eta_a &= \bar{T}_a(M) \\ \eta_a(x) &= 0 \text{ für } x \in \partial T_a(M) \\ (88) \quad 0 &\leq \eta_a(x) \leq A(a)^4 \\ \eta_a &\in C^\infty(T_a(M)) \text{ und } \eta_a \in C^1_0(M) \end{aligned}$$

Folgende Bezeichnungen dienen der Abkürzung:

$$(89) \quad r(x) := (r_M(x) - B) = \left(r_M(x) - \frac{a+R_0}{2} \right)$$

und damit

$$(90) \quad \eta_a(x) = \begin{cases} [A^2 - r^2(x)]^2 & \text{für } x \in T_a(M) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei bemerkt, daß die Funktion $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ aus (89) dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften hat wie der geodätische Abstand. Ihre Ableitungen genügen denselben Abschätzungen.

Außerdem gilt nach (85):

$$(91) \quad T_{a_1}(M) \subseteq T_{a_2}(M) \quad \text{für } R_0 < a_1 < a_2$$

und wir setzen

$$(92) \quad T_\infty(M) := \bigcup_{a > R_0} T_a(M) = \{ x \in M \mid r_M(x) > R_0 \} ,$$

damit haben wir $T_a(M) \uparrow T_\infty(M)$ für $a \rightarrow \infty$.

5.3. Beweis von Satz 5.1.

1. Den Bezeichnungen in Abschnitt 5.2. entsprechend seien der Referenzpunkt $x_0 \in M$ und $R_0 > 0$ so gewählt, daß (84) gilt, also

$$\Omega \subseteq B_{R_0}(x_0) \subseteq M .$$

Die Bildmannigfaltigkeit N ist nach Voraussetzung eine Cartan-Hadamard-Mannigfaltigkeit (vgl. Abschnitt 3.3.), daher ist insbesondere die Exponentialabbildung $\exp_{z_0}$ in einem beliebigen Referenzpunkt $z_0 \in N$ ein Diffeomorphismus, so daß der zugehörige geodätische Abstand r_N bezüglich $z_0 \in N$ von der Klasse $C^\infty(N \setminus \{z_0\})$ ist (vgl. Bemerkung nach Satz 3.1.).

Für $a > R_0$ sei $T_a(M)$ gemäß (85) definiert. Da die harmonische Abbildung $u : M \rightarrow N$ insbesondere stetig ist, ist $u(\bar{T}_a(M)) \subseteq N$ als stetiges Bild einer kompakten Menge eine kompakte Teilmenge von N . Wir wählen einen Referenzpunkt $z_0 \in N$, für den gilt

$$z_0 \notin u(\bar{T}_a(M)) ,$$

mit r_N bezeichnen wir den zugehörigen geodätischen Abstand in N . Insbesondere ist also r_N in $u(\bar{T}_a(M))$ von der Klasse C^∞ .

Wir wählen eine reelle Zahl $b > 0$ mit

$$(93) \quad b > \sup \{ r_N \circ u(x) \mid x \in \bar{T}_a(M) \}.$$

Nach diesen Vorbereitungen definieren wir die Familie von Hilfsfunktionen ϕ_a , $a > R_0$:

$$\phi_a : M \rightarrow \mathbb{R}$$

(94)

$$\phi_a(x) := \frac{\eta_a(x) \cdot e(u)(x)}{(b^2 - r_N^2 \circ u(x))^2} = \frac{[A^2 - r^2(x)]^2 \cdot e(u)(x)}{(b^2 - r_N^2 \circ u(x))^2}$$

Nach Konstruktion gilt für jedes $a > R_0$:

$$\phi_a \text{ ist stetig in } M, \text{ supp } \phi_a = \bar{T}_a(M)$$

$$\text{und } \phi_a(x) \geq 0 \quad \forall x \in M, \quad \phi_a(x) = 0 \text{ für } x \in \partial T_a(M).$$

2. Die stetige Funktion ϕ_a nimmt über dem Kompaktraum $\bar{T}_a(M)$ ihr Maximum an.

Falls das Maximum in einem Punkt $x \in \partial T_a(M)$ angenommen wird, erhalten wir, wie in der Beweisskizze, 1. Fall, im Abschnitt 5.1. vollständig dargestellt ist, $u \equiv \text{const.}$ in $T_a(M)$. Nach Lemma 5.1.(3) ist dann $u \equiv \text{const.}$ in M .

Wir müssen also nur noch den Fall betrachten, daß die Funktion ϕ_a ihr Maximum in einem inneren Punkt $\bar{x} \in T_a(M)$ annimmt und dort $\phi_a(\bar{x}) > 0$ gilt.

3. Zunächst diskutieren wir den in der Beweisskizze angeführten Fall 2a:

ϕ_a ist in ihrem Maximalpunkt $\bar{x} \in T_a(M)$ differenzierbar. Wegen $\phi_a(\bar{x}) > 0$ ist (wenigstens in einer Umgebung von $\bar{x}$ in M) auch $\log \phi_a$ eine wohldefinierte differenzierbare Funktion.

Wegen der Monotonie von $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ wird auch $\log \phi_a$ in $\bar{x} \in T_a(M)$ maximal; wir betrachten im folgenden

$$\log \phi_a = 2 \log(A^2 - r^2) + \log e(u) - 2 \log(b^2 - r_N^2 \circ u).$$

Im Extremalpunkt $\bar{x} \in T_a(M)$ gilt:

$$(95) \quad \begin{aligned} D \log \phi_a(\bar{x}) &= 0 \\ \Delta_M \log \phi_a(\bar{x}) &\leq 0 \end{aligned}$$

$D \log \phi_a(\bar{x}) = 0$ ist äquivalent zu $(\log \phi_a)_{,i}(\bar{x}) = 0$, $1 \leq i \leq m = \dim M$.
Außerdem erhalten wir:

$$(96) \quad (\log \phi_a)_{,i} = -2 \frac{(r^2)_{,i}}{(A^2 - r^2)} + \frac{e(u)_{,i}}{e(u)} + 2 \frac{(r_N^2 \circ u)_{,i}}{(b^2 - r_N^2 \circ u)}$$

und

$$\begin{aligned} (\log \phi_a)_{,i'j} &= -2 \frac{(r^2)_{,i'j}}{(A^2 - r^2)} - 2 \frac{(r^2)_{,i} (r^2)_{,j}}{(A^2 - r^2)^2} + \frac{e(u)_{,i'j}}{e(u)} \\ &\quad - \frac{e(u)_{,i} e(u)_{,j}}{e(u)^2} + 2 \frac{(r_N^2 \circ u)_{,i'j}}{(b^2 - r_N^2 \circ u)} + 2 \frac{(r_N^2 \circ u)_{,i} (r_N^2 \circ u)_{,j}}{(b^2 - r_N^2 \circ u)^2} \end{aligned}$$

also mit $\Delta_M \log \phi_a = g^{ij} (\log \phi_a)_{,i'j}$

$$\begin{aligned} (97) \quad \Delta_M \log \phi_a &= -2 \frac{\Delta_M(r^2)}{(A^2 - r^2)} - 2 \frac{\|Dr^2\|^2}{(A^2 - r^2)^2} \\ &\quad + \frac{\Delta_M e(u)}{e(u)} - \frac{\|D(e(u))\|^2}{e(u)^2} \\ &\quad + 2 \frac{\Delta_M(r_N^2 \circ u)}{(b^2 - r_N^2 \circ u)} + 2 \frac{\|D(r_N^2 \circ u)\|^2}{(b^2 - r_N^2 \circ u)^2} \end{aligned}$$

4. Wir schätzen jetzt die einzelnen Terme im Extremalpunkt $\bar{x} \in T_a(M)$ von ϕ_a ab:

Nach (95) und (96) gilt

$$0 = D(\log \phi_a)(\bar{x}) = -2 \frac{Dr^2(\bar{x})}{(A^2 - r^2(\bar{x}))} + \frac{De(u)(\bar{x})}{e(u)(\bar{x})} + 2 \frac{D(r_N^2 \circ u)(\bar{x})}{(b^2 - r_N^2 \circ u(\bar{x}))}$$

und damit

$$(98) \quad \frac{\|D(e(u))(\bar{x})\|^2}{e(u)(\bar{x})^2} \leq 4 \frac{\|Dr^2(\bar{x})\|^2}{(A^2 - r^2(\bar{x}))^2} + 8 \frac{\|Dr^2(\bar{x})\| \|D(r_N^2 \circ u)(\bar{x})\|}{(A^2 - r^2(\bar{x}))(b^2 - r_N^2 \circ u(\bar{x}))} \\ + 4 \frac{\|D(r_N^2 \circ u)(\bar{x})\|^2}{(b^2 - r_N^2 \circ u(\bar{x}))^2}$$

Im folgenden wird aus schreibtechnischen Gründen das Argument $\bar{x}$ in den Formeln weggelassen; die Abschätzungen sind jedoch so zu verstehen, daß sie im Maximalpunkt $\bar{x} \in T_a(M)$ gelten.

Alle diese Abschätzungen gelten punktweise, wir können daher die Abschätzungen unter Verwendung speziell angepaßter lokaler Koordinaten herleiten.

Dazu betrachten wir Normalkoordinaten mit Zentrum $\bar{x}$ bzw. $u(\bar{x})$ bezüglich ON-Basen $\{E_1, \dots, E_m\}$ von $T_{\bar{x}}M$ bzw. $\{e_1, \dots, e_n\}$ von $T_{u(\bar{x})}N$ (es gilt dann $g^{ij}(\bar{x}) = \delta_{ij}$, $M_{I,jk}^i(\bar{x}) = 0$, $\gamma_{\alpha\beta}(u(\bar{x})) = \delta_{\alpha\beta}$, $N_{\Gamma\alpha\beta}^\gamma(u(\bar{x})) = 0$, vgl. Abschnitt 2.1. und Definition 2.10. für die auftretenden kovarianten Ableitungen); wir erhalten:

$$e(u)_{,j} = u_k^\alpha u_{kj}^\alpha, \quad D(e(u)) = e(u)_{,j} E_j = (u_k^\alpha u_{kj}^\alpha) E_j$$

und damit (Summation über $1 \leq \alpha \leq n$, $1 \leq k, j \leq m$)

$$(99) \quad \|D(e(u))\|^2 = (u_k^\alpha u_{kj}^\alpha)^2 \leq (u_k^\alpha)^2 (u_{kj}^\alpha)^2 = 2e(u) (u_{kj}^\alpha)^2.$$

Nun folgt die wichtige Abschätzung der Krümmungsterme.
Bezüglich der eben eingeführten Normalkoordinaten gilt nach der Weitzenböck-Formel (Satz 2.6. und Korollar zu Satz 2.6.)

$$\Delta_M e(u) = (u_{kj}^\alpha)^2 + M_{Ric}{}_{ij} u_i^\alpha u_j^\alpha - N_{\beta\tau\gamma}^\alpha u_\ell^\beta u_i^\tau u_\ell^\gamma u_i^\alpha.$$

Nach Konstruktion ist $\bar{x} \in T_a(M) \subseteq M \setminus \Omega$, es gilt also in $\bar{x}$

nach Voraussetzung (1) und (2):

$$(100) \quad \begin{aligned} M_{Ric_{ij}} u_i^\alpha u_j^\alpha &= (u_i^\alpha)^2 Ric_{\bar{x}} \left(\frac{Du}{\|Du\|} \right) \geq 0 \\ N_{R_{\beta\tau\gamma}} u_\ell^\beta u_i^\tau u_\ell^\gamma u_i^\alpha &= (u_i^\alpha)^2 (u_\ell^\alpha)^2 S_N(u(\bar{x})) (u_*(E_i), u_*(E_\ell)) \leq 0 \end{aligned}$$

Aus (99) und (100) erhalten wir in $\bar{x} \in M$:

$$(101) \quad \Delta_M e(u) \geq (u_{kj}^\alpha)^2$$

Aus (99) und (100) erhalten wir

$$\frac{\Delta_M e(u)}{e(u)} \geq \frac{1}{2} \frac{\|D(e(u))\|^2}{e(u)^2},$$

und damit

$$(102) \quad \frac{\Delta_M e(u)}{e(u)} - \frac{\|D(e(u))\|^2}{e(u)^2} \geq -\frac{1}{2} \frac{\|D(e(u))\|^2}{e(u)^2}$$

Mit (95), (97), (98) und (102) bekommt man in $\bar{x} \in T_a(M)$:

$$(103) \quad \begin{aligned} 0 &\geq -4 \frac{\|Dr^2\|^2}{(A^2 - r^2)^2} - 4 \frac{\|Dr^2\| \|D(r_N^2 \circ u)\|}{(A^2 - r^2)(b^2 - r_N^2 \circ u)} \\ &\quad - 2 \frac{\Delta_M r^2}{A^2 - r^2} + 2 \frac{\Delta_M (r_N^2 \circ u)}{(b^2 - r_N^2 \circ u)}. \end{aligned}$$

Wegen $r = r_M - B$, $r^2 = (r_M - B)^2$ gilt $Dr = Dr_M$, $\Delta_M r = \Delta_M r_M$
also (mit Korollar zu Lemma 3.1.): $\|Dr\| = 1$. Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \Delta_M r^2 &= 2(\|Dr\|^2 + r \Delta_M r) \\ &= 2(1 + (r_M - B) \Delta_M r_M) \end{aligned}$$

und damit in $\bar{T}_a(M)$ (vgl. Satz 3.3.)

$$(104) \quad \begin{aligned} |\Delta_M r^2| &\leq c(R_M, m)(1 + a) \\ \|Dr^2\| &= 2\|(r_M - B)\| \|Dr_M\| \leq 2a \end{aligned}$$

Da u harmonisch ist, also $\tau(u) = 0$ gilt, folgt aus der (riemannschen) Kettenregel (vgl. z.B. J. Eells, J.H. Sampson [11], S. 131; W. Jäger, H. Kaul [37], S. 274/275)

$$\begin{aligned} \Delta_M(r_N^2 \circ u) &= \text{Sp}_M H_{r_N^2}(u_*(E_i), u_*(E_j)) \\ &= g^{ij} u_i^\alpha u_j^\beta H_{r_N^2}(e_\alpha, e_\beta) \end{aligned}$$

Bezüglich der oben eingeführten Normalkoordinaten mit Zentrum $\bar{x}$ bzw. $u(\bar{x})$ gilt $H_{r_N^2}(e_\alpha, e_\beta) = (r_N^2)_{\alpha\beta}$ also

$$(105) \quad \Delta_M(r_N^2 \circ u) = (r_N^2)_{\alpha\beta} u_i^\alpha u_i^\beta \geq \lambda (u_i^\alpha)^2 = 2\lambda e(u) \ .$$

Dabei ist λ der kleinste Eigenwert des Hesse-Tensors $H_{r_N^2}$.

Zur Abschätzung von λ wenden wir den Vergleichssatz für Hesse-Tensoren, Satz 3.4., an:

Die Schnittkrümmung von N ist nach Voraussetzung nicht positiv, also stets ≤ 0 . Als Vergleichsmannigfaltigkeit $\tilde{N}$ benutzen wir $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik, $n = \dim N$. $\tilde{N} = \mathbb{R}^n$ hat die Schnittkrümmung 0. Nach Satz 3.4. (3) gilt: $\lambda \geq \tilde{\lambda}$, $\tilde{\lambda}$ kleinster Eigenwert des Hesse-Tensors von $\tilde{r}(x)^2 = |x|^2$ in $\mathbb{R}^n$, also $\tilde{\lambda} = 2$. Wir haben also mit (105) die Abschätzung

$$(106) \quad \Delta_M(r_N^2 \circ u) \geq 4e(u) \ .$$

In $\bar{x} \in T_a(M)$ gilt weiter:

$$\|D(r_N^2 \circ u)\|^2 = [((r_N^2)_\alpha \circ u) u_i^\alpha]^2$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \| (r_N^2)_\alpha \circ u \|^2 (u_i^\alpha)^2 \\
 &= \| (Dr_N^2) \circ u \|^2 \| Du \|^2 \\
 &= 2 \| (Dr_N^2) \circ u \|^2 e(u) ,
 \end{aligned}$$

wegen $(Dr_N^2) \circ u = 2(r_N \circ u)[(Dr_N) \circ u]$ und dem Korollar zu Lemma 3.1. angewandt auf r_N gilt in $\bar{T}_a(M)$ nach Wahl von b (vgl. (93)) $\| (Dr_N^2) \circ u \| = 2 \| r_N \circ u \| \| (Dr_N) \circ u \| \leq 2b$, insgesamt also

$$(107) \quad \| D(r_N^2 \circ u) \| \leq 2 \cdot \sqrt{2} b \sqrt{e(u)} .$$

Mit (104), (107) und der Hölder-Ungleichung erhalten wir für $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\| Dr^2 \| \| D(r_N^2 \circ u) \|}{(A^2 - r^2) (b^2 - r_N^2 \circ u)} &\leq \frac{4\sqrt{2} ab \sqrt{e(u)}}{(A^2 - r^2) (b^2 - r_N^2 \circ u)} \leq \varepsilon \frac{e(u)}{(b^2 - r_N^2 \circ u)} \\
 &\quad + \frac{1}{\varepsilon} \frac{a^2 b^2}{(A^2 - r^2)^2 (b^2 - r_N^2 \circ u)}
 \end{aligned}$$

und mit $\varepsilon = \frac{7}{4}$:

$$(108) \quad -4 \frac{\| Dr^2 \| \| D(r_N^2 \circ u) \|}{(A^2 - r^2) (b^2 - r_N^2 \circ u)} \geq -7 \frac{e(u)}{(b^2 - r_N^2 \circ u)} - \frac{4}{7} \frac{a^2 b^2}{(A^2 - r^2)^2 (b^2 - r_N^2 \circ u)}$$

Aus (103), (104), (106) und (108) folgt in $\bar{x} \in T_a(M)$:

$$\frac{e(u)}{(b^2 - r_N^2 \circ u)} \leq \frac{16a^2}{(A^2 - r^2)^2} + 2c \frac{(1+a)}{(A^2 - r^2)} + \frac{4}{7} \frac{a^2 b^2}{(A^2 - r^2)^2 (b^2 - r_N^2 \circ u)}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 (109) \quad \Phi_a(\bar{x}) &\leq \frac{16a^2}{(b^2 - r_N^2 \circ u(\bar{x}))} + \frac{2c(1+a)A^2}{(b^2 - r_N^2 \circ u(\bar{x}))} \\
 &\quad + \frac{4}{7} \frac{a^2 b^2}{(b^2 - r_N^2 \circ u(\bar{x}))^2} .
 \end{aligned}$$

Wegen $\Lambda = \Lambda(a) = \frac{a-R_0}{2} \leq \frac{a}{2}$ also $\Lambda^2 \leq \frac{1}{4} a^2$ erhalten wir mit

$$\beta := \inf \{ b^2 - r_N^2 \circ u(x) \mid x \in \bar{T}_a(M) \}$$

(dabei gilt $\beta > 0$ nach Wahl von b , vgl. (93)) und einer reellen Konstanten $c > 0$, die nicht von a abhängt, die Abschätzung

$$(110) \quad \phi_a(\bar{x}) \leq c \left\{ \frac{a^2}{\beta} + \frac{a^3}{\beta} + \frac{a^2 b^2}{\beta^2} \right\}.$$

5. Wir schätzen jetzt ausgehend von (110) für einen beliebigen aber dann fest gewählten Punkt $x \in T_a(M)$ die Energiedichte $e(u)(x)$ im Punkt x ab.

$\bar{x} \in T_a(M)$ ist der Maximalpunkt von ϕ_a in $\bar{T}_a(M)$, also gilt in $x \in T_a(M)$:

$$\phi_a(x) = \frac{[A^2 - r^2(x)]^2 e(u)(x)}{(b^2 - r_N^2 \circ u(x))^2} \leq \phi_a(\bar{x}) \quad \text{also mit (110)}$$

$$(111) \quad e(u)(x) \leq c \left\{ \frac{a^2 b^4}{\beta (A^2 - r(x)^2)^2} + \frac{a^3 b^4}{\beta (A^2 - r(x)^2)^2} + \frac{a^2 b^6}{\beta^2 (A^2 - r(x)^2)^2} \right\}.$$

Der Forderung (93) genügend wählen wir

$$b := 2 \sup \{ (r_N \circ u)(x) \mid x \in \bar{T}_a(M) \},$$

man hat dann

$$\begin{aligned} (b^2 - r_N^2 \circ u) &= (b - r_N \circ u)(b + r_N \circ u) \\ &\geq b(b - r_N \circ u) \geq b(b - \sup \{ r_N \circ u(x) \mid x \in \bar{T}_a(M) \}) \\ &= 2[\sup \{ r_N \circ u(x) \mid x \in \bar{T}_a(M) \}]^2 = \frac{b^2}{2} \end{aligned}$$

also $(b^2 - r_N^2 \circ u) > \frac{b^2}{2}$ und insbesondere $\beta \geq \frac{b^2}{2}$ also

$$\frac{b^4}{\beta} \leq 2b^2, \frac{b^6}{\beta^2} \leq 4b^2;$$

außerdem gilt für $a > 3R_0$ also $A = A(a) = \frac{a-R_0}{2} \geq R_0$:

$$a^2 = 4A^2 + 4AR_0 + R_0^2 \leq 9A^2 \text{ und } a^3 \leq 27A^3.$$

Damit erhalten wir für $a \geq 3R_0$ aus (111):

$$(112) \quad e(u)(x) \leq c \left\{ \frac{A^2 b^2}{(A^2 - r(x))^2} + \frac{A^3 b^2}{(A^2 - r(x))^2} \right\}.$$

Wir wählen jetzt

$$a \geq \max \{ 3R_0, 2\sqrt{2} r^2(x) + R_0, 2(1 - r(x)) + R_0, 2(R_0 + 2r(x)) \},$$

dann gilt $A = A(a) \geq \sqrt{2} r^2(x)$, $A \geq 1 - r(x)$ und

$$\frac{A^2}{A^2 - r^2(x)} \leq 1 + \frac{r^2(x)}{A^2 - r^2(x)} \leq 2$$

$$(113) \quad \frac{A}{A^2 - r^2(x)} = \frac{A}{A + r(x)} \cdot \frac{1}{A - r(x)} \leq \frac{1}{A - r(x)}$$

$$\frac{1}{A^2 - r^2(x)} = \frac{1}{(A - r(x))(A + r(x))} \leq \frac{1}{A - r(x)}$$

$$A - r(x) \geq \frac{1}{4} a.$$

Aus (112) und (113) folgt:

$$(114) \quad e(u)(x) \leq 8c \frac{b^2}{a} = 8c \left[\frac{b}{\sqrt{a}} \right]^2.$$

Nach Konstruktion ist $\bar{T}_a(M) \subseteq \bar{B}_a(x_0)$ also

$$b = 2 \sup \{ (r_N \circ u)(x) \mid x \in \bar{T}_a(M) \}$$

$$\leq 2 \sup \{ (r_N \circ u)(x) \mid x \in \bar{B}_a(x_0) \} = 2S(a)$$

mit Voraussetzung (3) haben wir insgesamt aus (114)

$$e(u)(x) \leq 32 c \left[\frac{S(a)}{\sqrt{a}} \right]^2 \text{ also auch}$$

$$e(u)(x) \leq 32 c \left[\limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{\sqrt{a}} \right]^2 = 0.$$

Für beliebiges $x \in T_\infty(M)$ haben wir $e(u)(x) = 0$ gezeigt, wegen $e(u)(x) = \frac{1}{2} \|Du(x)\|^2$ gilt also $Du(x) = 0$ für $x \in T_\infty(M)$ und damit $u \equiv \text{const.}$ in $T_\infty(M)$. Nach Lemma 5.1. ist damit $u \equiv \text{const.}$ in M . Damit ist der in der Beweisskizze angegebene Fall 2a abgeschlossen.

6. Es bleibt Fall 2b zu betrachten:

ϕ_a ist in $\bar{x} \in T_a(M)$ nicht differenzierbar.

Wir werden diesen Fall mit Hilfe der in Abschnitt 3.5. konstruierten Support-Funktion (Lemma 3.4.) auf den Fall 2a zurückführen. Sei also $s_M^\varepsilon : U(\bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}$ die gemäß Lemma 3.4. existierende Support-Funktion zu r_M bezüglich $\bar{x} \in M$.

Wir definieren $\phi_a^\varepsilon : U(\bar{x}) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\phi_a^\varepsilon(x) := \frac{\eta_a^\varepsilon(x) \cdot e(u)(x)}{(b^2 - r_N^2 \circ u(x))^2}$$

$$\text{mit } \eta_a^\varepsilon(x) := \begin{cases} [A^2 - (s_M^\varepsilon(x) - B)^2]^2 & \text{für } x \in T_a(M) \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

ϕ_a^ε unterscheidet sich also von ϕ_a auf $U(\bar{x})$ dadurch, daß wir den geodätischen Abstand r_M durch die zugehörige Support-Funktion s_M^ε ersetzt haben.

Nach Lemma 3.4. gilt $r_M(x) \leq s_M^\varepsilon(x) \forall x \in U(\bar{x})$ und $r_M(\bar{x}) = s_M^\varepsilon(\bar{x})$

$$\text{also } \eta_a^\varepsilon(x) = \tilde{\eta}_a \circ s_M^\varepsilon(x) = [A^2 - (s_M^\varepsilon(x) - B)^2]^2$$

$$\leq [A^2 - (r_M(x) - B)^2]^2 = \tilde{\eta}_a \circ r_M(x) = \eta_a(x)$$

und damit

$$\begin{aligned} \phi_a(x) &\geq \phi_a^{\varepsilon}(x) \quad \forall x \in U(\bar{x}) \\ (115) \quad \phi_a(\bar{x}) &= \phi_a^{\varepsilon}(\bar{x}) . \end{aligned}$$

Wegen (115) haben ϕ_a und ϕ_a^{ε} im selben Punkt $\bar{x} \in T_a(M)$ ein Maximum. ϕ_a^{ε} ist in $\bar{x} \in T_a(M)$ nach Konstruktion differenzierbar. Zur Abschätzung von $\phi_a(\bar{x})$ nach oben genügt es also, $\phi_a^{\varepsilon}(\bar{x})$ nach oben abzuschätzen. Nach Lemma 3.4. (5), (6) und Satz 3.3. genügen r_M und s_M^{ε} denselben Abschätzungen. Wir erhalten daher die gewünschte Abschätzung für $\phi_a^{\varepsilon}(\bar{x})$ genau wie im Fall 2a die entsprechende Abschätzung (109) für $\phi_a(\bar{x})$. Wegen $\phi_a(\bar{x}) = \phi_a^{\varepsilon}(\bar{x})$ können wir dann mit dem Beweis wie im Fall 2a ab (109) fortfahren.

Damit ist Satz 5.1. vollständig bewiesen.

Durch Spezialisierung auf den Fall $N = \mathbb{R}$ mit der euklidischen Metrik erhalten wir als (verallgemeinertes) Analogon zum Satz 4.1. (S. T. Yau [66]), das

Korollar 5.1.:

M sei eine m -dimensionale, vollständige, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gebe eine beschränkte Teilmenge $\Omega \subseteq M$, so daß die Ricci-Krümmung von M außerhalb Ω nicht negativ ist, also

$$(1) \quad \text{ric}_x(v) \geq 0 \quad \forall x \in M \setminus \Omega, v \in T_x^M .$$

Dann gilt:

1. Jede beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(M, \mathbb{R})$ ist konstant.
2. Jede harmonische Funktion $u \in C^2(M, \mathbb{R})$ mit der Wachstumsbedingung

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{a}} \sup \{ |u(x)| \mid x \in \bar{B}_a(x_0) \} = 0$$

ist konstant.

3. Jede einseitig beschränkte harmonische Funktion $u \in C^2(M, \mathbb{R})$ ist konstant.

Beweis: Die Aussage von 2. ist genau Satz 5.1. für den Spezialfall $N = \mathbb{R}$; jede beschränkte Funktion auf M erfüllt die Wachstumsbedingung unter 2., also gilt auch die Aussage von 1.. Zum Beweis von 3. nehmen wir an, daß u nach oben beschränkt ist (andernfalls betrachte man $-u$). Wir wählen $b = 2 \sup\{u(x) \mid x \in M\}$ und betrachten die Hilfsfunktionen (o.B. d.A. $b > 0$!)

$$\phi_a(x) = \frac{\eta_a(x) \cdot e(u)(x)}{(b-u(x))^2}.$$

Analoge Abschätzungen wie in Satz 5.1. liefern dann für $x \in T_a(M)$

$$e(u)(x) \leq c \left[\frac{b}{\sqrt{a}} \right]^2.$$

Da b eine von a unabhängige Konstante ist, folgt die Aussage mit $a \rightarrow \infty$ wie in Satz 5.1..

5.4. Beweis von Satz 5.2.

Der Beweis von Satz 5.2. folgt mit kleinen Abweichungen genau dem Vorgehen beim Beweis von Satz 5.1..

Wir benutzen dieselben Bezeichnungen und genau dieselbe Familie von Hilfsfunktionen ϕ_a .

Bei der Abschätzung von $\phi_a(\bar{x})$ (bzw. $\phi_a^c(\bar{x})$) müssen wir im Vergleich zu Satz 5.1. nur zwei Änderungen vornehmen.

Die erste, wichtigste Änderung betrifft die Abschätzung der Krümmungsterme: Bezüglich der Normalkoordinaten mit Zentrum $\bar{x}$ bzw. $u(\bar{x})$ und den zugehörigen ON-Basen $\{E_1, \dots, E_m\}$ von $T_{\bar{x}}^M$ und $\{e_1, \dots, e_n\}$ von $T_{u(\bar{x})}N$ erhalten wir aus der Weitzenböck-Formel (Satz 2.6. und Korollar zu Satz 2.6.) mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 2.1.:

$$\begin{aligned}
 (116) \quad \Delta_M e(u)(\bar{x}) &= (u_{ij}^\alpha(\bar{x}))^2 + {}^M \text{Ric}_{ij}(\bar{x}) u_i^\alpha(\bar{x}) u_j^\alpha(\bar{x}) \\
 &\quad - {}^N R_{\beta\tau\gamma}^\alpha(u(\bar{x})) u_j^\beta(\bar{x}) u_i^\tau(\bar{x}) u_j^\gamma(\bar{x}) u_i^\alpha(\bar{x}) \\
 &= (u_{ij}^\alpha(\bar{x}))^2 + (u_i^\alpha(\bar{x}))^2 \text{ric}_{\bar{x}} \left(\frac{Du}{\|Du\|} \right) \\
 &\quad - (u_i^\alpha(\bar{x}))^2 (u_j^\alpha(\bar{x}))^2 S_N(u(\bar{x}))(u_*(E_i), u_*(E_j)) \\
 &= (u_{ij}^\alpha(\bar{x}))^2 + 2e(u)(\bar{x}) \text{ric}_{\bar{x}} \left(\frac{Du}{\|Du\|} \right) \\
 &\quad - 4e(u)^2(\bar{x}) S_N(u(\bar{x}))(u_*(E_i), u_*(E_j)).
 \end{aligned}$$

Mit den Krümmungsvoraussetzungen (1) und (2) erhalten wir:

$$(117) \quad \Delta_M e(u)(\bar{x}) \geq (u_{ij}^\alpha(\bar{x}))^2 + 2R_M e(u)(\bar{x}) - 4S_N e(u)^2(\bar{x}).$$

Für $t \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, betrachten wir die Funktion

$$p(t) := 2R_M t - 4S_N t^2.$$

Es gilt: $p(t) \geq 0$ für $t \geq 0$, falls $t \leq \frac{R_M}{2S_N}$.

Nach Konstruktion (vgl. Beweis von Satz 5.1., Abschnitt 5.3.) gilt für jeden reellen Parameter $a > R_0$:

$$\bar{x} \in T_a(M) \subseteq M \setminus \Omega$$

also wegen der Voraussetzung (4): $e(u)(\bar{x}) \leq \sup_{x \in M \setminus \Omega} e(u)(x) \leq \frac{R_M}{2S_N}$

und damit

$$2R_M e(u)(\bar{x}) - 4S_N e(u)^2(\bar{x}) \geq 0$$

und schließlich

$$\Delta_M e(u)(\bar{x}) \geq (u_{1j}^\alpha(\bar{x}))^2.$$

Dies entspricht genau der Abschätzung (101) im Beweis von Satz 5.1. . Wie im Beweis von Satz 5.1. Abschätzung (105) erhalten wir

$$\Delta_M(r_N^2 \circ u)(\bar{x}) \geq 2\lambda(\bar{x})e(u)(\bar{x})$$

λ ist der kleinste Eigenwert des Hesse-Tensors $H_{r_N^2}$ im Punkt $\bar{x}$.

Zur Abschätzung von λ benutzen wir den Vergleichssatz für Hesse-Tensoren (Satz 3.4.). Als Vergleichsmannigfaltigkeit dient die n -dimensionale Hyperfläche $\hat{N} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch

$$(z_1)^2 + \dots + (z_n)^2 + \frac{1}{S_N} (z_{n+1})^2 = \frac{1}{S_N} \quad \text{mit der Metrik, die man}$$

durch Einschränkung von

$$ds^2 = (dz_1)^2 + \dots + (dz_n)^2 + \frac{1}{S_N} (dz_{n+1})^2$$

auf $\hat{N}$ erhält. Nach S. Kobayashi, K. Nomizu [49], S. 204, Theorem 3.1., ist $\hat{N}$ eine zusammenhängende, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung S_N ; $\hat{N}$ ist isometrisch zu einer n -Sphäre mit Radius $\frac{1}{\sqrt{S_N}}$.

Nach Satz 3.4. gilt $\lambda = \lambda(\bar{x}) \geq \hat{\lambda}$, $\hat{\lambda}$ ist der kleinste Eigenwert des Hesse-Tensors $H_{r_N^2}$. Wir haben also

$$\Delta_M(r_N^2 \circ u) \geq 2\hat{\lambda}e(u).$$

Diese Abschätzung ersetzt Abschätzung (106) im Beweis von Satz 5.1. .

Mit diesen beiden Änderungen erhalten wir genau wie im Beweis von Satz 5.1. die Abschätzung (110)

$$\Phi_a(\bar{x}) \leq c \left\{ \frac{a^2}{\beta} + \frac{a^3}{\beta} + \frac{a^2 b^2}{\beta^2} \right\},$$

dabei hängt c jetzt noch von der Konstanten $\tilde{\lambda}$ ab.

Der Rest des Beweises ist vollständig analog zum Beweis von Satz 5.1. ab Formel (110).

Damit ist Satz 5.2. bewiesen.

Bemerkung:

Im Fall $S_N = 0$, also N hat nicht positive Schnittkrümmung, ist die Voraussetzung (4) in Satz 5.2. gegenstandslos, denn $\frac{R_M}{2S_N} \uparrow + \infty$ für $S_N \downarrow 0$.

Dann stimmt Satz 5.2. mit einer etwas schwächeren Variante von Satz 5.1. überein, wie ein Vergleich der jeweiligen Voraussetzungen (1) an die Ricci-Krümmung von M zeigt.

5.5. Beweis von Satz 5.3.

1. Wir können uns auf den Fall $K = 1$ also in Voraussetzung (2) auf

$$S_N(z)(v, w) \leq 1 \quad \forall z \in N, v, w \in T_z N$$

beschränken.

Denn sei $\gamma = (\gamma_{\alpha\beta})$ der metrische Tensor von N ; wir definieren $\tilde{\gamma} = \tau\gamma = (\tau\gamma_{\alpha\beta})$ für eine reelle Konstante $\tau > 0$.

Anstelle von (N, γ) betrachten wir die riemannsche Mannigfaltigkeit $(N, \tilde{\gamma})$.

Es ist $\tilde{\gamma}^{-1} = (\tau\gamma_{\alpha\beta})^{-1} = \frac{1}{\tau} \gamma^{-1} = (\frac{1}{\tau} \gamma^{\alpha\beta})$, und für die

Christoffel-Symbole und Komponenten des Krümmungstensors in $(N, \tilde{\gamma})$ erhalten wir nach Abschnitt 2.1. (22), (31) und (37) für $z \in N$:

$N_{\Gamma\beta\gamma}^{\gamma\alpha}(z) = N_{\Gamma\beta\gamma}^{\alpha}(z)$ und damit $N_{R\beta\gamma\delta}^{\gamma\alpha}(z) = N_{R\beta\gamma\delta}^{\alpha}(z)$ und

$$\tilde{S}_N(z)(v, w) = \tau S_N(v, w) .$$

Mit $\tau = \frac{1}{K}$ erhält man also aus Voraussetzung (2):

$$\tilde{S}_N(z)(v, w) \leq 1 .$$

Die anderen differentialgeometrischen Eigenschaften von (N, γ) und $(N, \tilde{\gamma})$ sind identisch. Insbesondere gilt für das Spannungsfeld $\tilde{\tau}(u)$ von u in $(N, \tilde{\gamma})$:

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}(u)^\alpha &= \Delta_M u^\alpha + N_{\Gamma\beta\gamma}^{\gamma\alpha} g^{ij} D_i u^\beta D_j u^\gamma \\ &= \Delta_M u^\alpha + N_{\Gamma\beta\gamma}^{\alpha} g^{ij} D_i u^\beta D_j u^\gamma \\ &= \tau(u)^\alpha , \quad 1 \leq \alpha \leq n . \end{aligned}$$

Also ist mit $u : M \rightarrow (N, \gamma)$ auch $u : M \rightarrow (N, \tilde{\gamma})$ harmonisch. Im folgenden ist stets $K = 1$.

2. Sei r_N der geodätische Abstand bezüglich $z_0 \in N$. Wir definieren

$$g : B_R(z_0) \rightarrow \mathbb{R}$$

durch $g(z) := 1 - \cos r_N(z)$ für $z \in B_R(z_0)$.

Nach Voraussetzung ist $B_R(z_0)$ disjunkt zum Schnittpunkt von z_0 in N , also $B_R(z_0) \subseteq \exp_{z_0}(E(z_0))$; mit Satz 3.1. erhält man $g \in C^\infty(B_R(z_0) \setminus \{z_0\})$.

Wegen Voraussetzung (3)

$$u(M) \subseteq B_R(z_0) , \quad R < \frac{\pi}{2} ,$$

gilt $0 \leq (r_N \circ u)(x) < R < \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in M$ und damit:

$$(118) \quad \begin{aligned} 0 < c(R) &\leq \cos(r_N \circ u)(x) \leq 1, \quad \forall x \in M \\ 0 &\leq (g \circ u)(x) < b < 1, \quad \forall x \in M, \text{ mit } b = b(R). \end{aligned}$$

Wegen $g \circ u(x) = 1 - \cos(r_N \circ u)(x)$ gilt also auch $b > 1 - c(R)$ und

$$-1 + \frac{\cos(r_N \circ u)(x)}{(b - (g \circ u)(x))} = \frac{\cos(r_N \circ u)(x) - b + 1 - \cos(r_N \circ u)(x)}{(b - (1 - \cos(r_N \circ u)(x)))} \quad \forall x \in M$$

also

$$(119) \quad -1 + \frac{\cos(r_N \circ u)(x)}{(b - (g \circ u)(x))} \geq \frac{1-b}{\beta} =: d > 0 \quad \forall x \in M$$

$$\text{mit } \beta := \inf \{ b - (g \circ u)(x) \mid x \in M \}.$$

Außerdem haben wir das

Lemma 5.2.:

Es gilt für $1 \leq \alpha, \beta \leq n$

$$g_{\alpha\beta}(z) \geq (\cos r_N(z)) \delta_{\alpha\beta}, \quad \forall z \in B_R(z_0).$$

Beweis:

Für die n -Sphäre $\mathbb{S}^n$ mit Schnittkrümmung 1 gilt nach R.E. Greene, H. Wu [22], Prop. 2.20., S. 30 und H.I. Choi [9], S. 93 (mit $N = \mathbb{S}^n$) für den Hesse-Tensor von g (bezogen auf $N = \mathbb{S}^n$):

$$H_g = (\cos r_N) ds^2,$$

dabei ist ds^2 der metrische Tensor der n -Sphäre $\mathbb{S}^n$.

Nach Konstruktion ist die Schnittkrümmung der gegebenen Bildmannigfaltigkeit N kleiner oder gleich der Schnittkrümmung von $\mathbb{S}^n$, $n = \dim N$. Der Vergleichssatz für Hesse-Tensoren, Satz 3.4., ergibt dann:

$$H_g \geq (\cos r_N) ds^2$$

speziell also (bezüglich Normalkoordinaten um z):

$$g_{\alpha\beta}(z) \geq (\cos r_N(z)) \delta_{\alpha\beta}, \quad 1 \leq \alpha, \beta \leq n.$$

3. Mit den Bezeichnungen aus dem Beweis von Satz 5.1. definieren wir für $a > R_0$ die folgende Familie von Hilfsfunktionen

$$\phi_a(x) := \frac{\eta_a(x) e(u)(x)}{(b - (g \circ u)(x))^2}.$$

Wegen (118) ist ϕ_a auf M wohldefiniert, es gilt $\text{supp } \phi_a = \bar{T}_a(M)$. Im folgenden müssen wir nur den in der Beweisskizze angegebenen Fall 2a diskutieren. Die anderen Fälle (Randmaximum; ϕ_a in $\bar{x}$ nicht differenzierbar) werden genau wie im Beweis von Satz 5.1. behandelt.

Sei also $\bar{x} \in \bar{T}_a(M)$ Maximalpunkt von ϕ_a , und sei ϕ_a in $\bar{x}$ differenzierbar. $\bar{x}$ ist dann auch Maximalpunkt von $\log \phi_a$, und es gilt:

$$0 = D(\log \phi_a)(\bar{x})$$

$$0 \geq \Delta_M(\log \phi_a)(\bar{x}).$$

Analog zu (97), (98) aus dem Beweis von Satz 5.1. erhalten wir in $\bar{x} \in \bar{T}_a(M)$:

$$\begin{aligned} 0 \geq & -2 \frac{\Delta_M(r^2)}{(A^2 - r^2)^2} - 2 \frac{\|Dr^2\|^2}{(A^2 - r^2)^2} + \frac{\Delta_M e(u)}{e(u)} - \frac{\|D(e(u))\|^2}{e(u)^2} \\ & + 2 \frac{\Delta_M(g \circ u)}{(b - g \circ u)} + 2 \frac{\|D(g \circ u)\|^2}{(b - g \circ u)^2} \end{aligned}$$

und

$$\frac{\|D(e(u))\|^2}{e(u)^2} \leq 4 \frac{\|Dr^2\|^2}{(A^2 - r^2)^2} + 8 \frac{\|Dr^2\| \|D(g \circ u)\|}{(A^2 - r^2)(b - g \circ u)} + 4 \frac{\|D(g \circ u)\|^2}{(b - g \circ u)^2}$$

Zur Abschätzung der Krümmungsterme benutzen wir die aus der Weitzenböck-Formel hergeleitete Formel (116) aus dem Beweis von Satz 5.2.:

In $\bar{x} \in T_a(M)$ gilt mit Voraussetzung (2) ($K = 1$):

$$\Delta_M e(u)(\bar{x}) = (u_{ij}^\alpha(\bar{x}))^2 + 2e(u)(\bar{x}) \operatorname{ric}_{\bar{x}}\left(\frac{Du}{\|Du\|}\right) - 4e(u)^2(\bar{x})$$

und mit Voraussetzung (1):

$$\Delta_M e(u)(\bar{x}) \geq (u_{ij}^\alpha(\bar{x}))^2 - 4e(u)^2(\bar{x}) .$$

Aus (99) im Beweis von Satz 5.1. haben wir

$$(u_{ij}^\alpha(\bar{x}))^2 \geq \frac{1}{2} \frac{\|D(e(u))\|^2}{e(u)} , \text{ also insgesamt in } \bar{x} \in T_a(M):$$

$$\frac{\Delta_M e(u)}{e(u)} \geq \frac{1}{2} \frac{\|D(e(u))\|^2}{e(u)^2} - 4e(u)$$

Außerdem gilt wie im Beweis von Satz 5.1.:

$$\Delta_M(g \circ u) \geq 2\lambda e(u) ,$$

λ kleinster Eigenwert von H_g , also mit Lemma 5.2.:

$$\Delta_M(g \circ u) \geq 2(\cos r_N)e(u) .$$

Diese Abschätzung ersetzt die Abschätzung (106) im Beweis von Satz 5.1. . Analog zum Beweis von Satz 5.1. erhalten wir

$$\|D(g \circ u)\|^2 \leq 2\|Dg\|^2 e(u)$$

$$Dg = D(\cos r_N) = -(\sin r_N) Dr_N$$

also mit $\|Dr_N\| = 1$ (Korollar zu Lemma 3.1. angewandt auf r_N):

$$\|Dg\|^2 = \sin^2 r_N$$

und mit $0 \leq \sin r_N(z) \leq 1 \quad \forall z \in B_R(z_0)$

$$\|D(g \circ u)\| \leq \sqrt{2} (\sin r_N) \sqrt{e(u)} \leq \sqrt{2} \sqrt{e(u)},$$

dies ist das Analogon zu (107) im Beweis von Satz 5.1. .

Mit all diesen Abschätzungen erhalten wir (vgl. (103)):

$$\begin{aligned} 0 \geq & -4 \frac{\|Dr^2\|^2}{(A^2-r^2)^2} - 4 \frac{\|Dr^2\| \|D(g \circ u)\|}{(A^2-r^2)(b-g \circ u)} - 2 \frac{\Delta_M(r^2)}{(A^2-r^2)} \\ & - 4e(u) + 4 \frac{\cos(r_N \circ u)}{(b-g \circ u)} e(u), \end{aligned}$$

und wie im Beweis von Satz 5.1. mit (104):

$$\begin{aligned} & \frac{\|Dr^2\| \|D(g \circ u)\|}{(A^2-r^2)(b-g \circ u)} \leq \frac{2\sqrt{2}a\sqrt{e(u)}}{(A^2-r^2)(b-g \circ u)} \\ 0 \geq & -16 \frac{a^2}{(A^2-r^2)^2} - 2 \frac{c(1+a)}{(A^2-r^2)} - 16\sqrt{2} \frac{a}{(A^2-r^2)(b-g \circ u)} \sqrt{e(u)} \\ & + \left\{ 4 \frac{\cos(r_N \circ u)}{(b-g \circ u)} - 4 \right\} e(u). \end{aligned}$$

Mit (119) folgt schließlich in $\bar{x} \in T_a(M)$:

$$\begin{aligned} (120) \quad 0 \geq & -16 \frac{a^2}{(A^2-r^2)^2} - 2 \frac{c(1+a)}{(A^2-r^2)} - 16\sqrt{2} \frac{a}{(A^2-r^2)(b-g \circ u)} \sqrt{e(u)} \\ & + d \cdot e(u) \end{aligned}$$

4. Mit $\ell := 16\sqrt{2} \frac{a}{(A^2-r^2)(b-g \circ u)} > 0$

$$k := 16 \frac{a^2}{(A^2-r^2)^2} + 2 \frac{c(1+a)}{(A^2-r^2)} > 0$$

hat (120) die Form

$$0 \leq d \cdot e(u) - \ell \cdot \sqrt{e(u)} - k$$

mit positiven Koeffizienten d, ℓ und k .

Außerdem ist $e(u) = e(u)(\bar{x}) \geq 0$. Wir betrachten die reelle Funktion $p(t) = dt^2 - \ell t - k$, $t \geq 0$.

Man rechnet aus, daß für $t \geq 0$ nur dann $p(t) \leq 0$ gilt, wenn

$$0 \leq t \leq \frac{\ell}{2d} + \frac{\sqrt{\ell^2 + 4dk}}{2d} \quad \text{ist.}$$

Insbesondere ist dann

$$0 \leq t \leq \max \left\{ \frac{2\ell}{d}, 2\sqrt{\frac{k}{d}} \right\},$$

und damit mit $t = \sqrt{e(u)(\bar{x})}$:

$$e(u)(\bar{x}) \leq 4 \max \left\{ \left(\frac{\ell}{d}\right)^2, \frac{k}{d} \right\} \quad \text{also}$$

$$(121) \quad e(u)(\bar{x}) \leq 4 \max \left\{ \left[\frac{16\sqrt{2}a}{d(A^2 - r^2(\bar{x}))(b - (g \circ u)(\bar{x}))} \right]^2, \frac{16a^2}{d(A^2 - r^2(\bar{x}))} + 2 \frac{c(1+a)}{d(A^2 - r^2(\bar{x}))} \right\}$$

und damit

$$(122) \quad \phi_a(\bar{x}) \leq c \max \left\{ \frac{a^2}{(b - (g \circ u)(\bar{x}))^4}, \frac{a^2}{(b - (g \circ u)(\bar{x}))^2} + \frac{(1+a)A^2}{(b - (g \circ u)(\bar{x}))^2} \right\}.$$

Mit $\beta > 0$ (unabhängig von a !) wie in (119) und wegen $A^2 \leq \frac{1}{4} a^2$ folgt schließlich:

$$(123) \quad \phi_a(\bar{x}) \leq c \max \left\{ \frac{a^2}{\beta^4}, \frac{a^2}{\beta^2} + \frac{a^3}{\beta^2} \right\}.$$

5. Für alle $x \in T_a(M)$ gilt $\phi_a(x) \leq \phi_a(\bar{x})$ und damit für $a \geq 3R_0$ (dann gilt $a^2 \leq 9A^2$, $a^3 \leq 27A^3$ nach Beweis von Satz 5.1. vor Formel (112)):

$$(124) \quad e(u)(x) \leq c \max \left\{ \frac{A^2}{(A^2 - r^2(x))^2} \cdot \frac{b^2}{\beta^4}, \right. \\ \left. \left[\frac{A^2}{(A^2 - r^2(x))^2} + \frac{A^3}{(A^2 - r^2(x))^2} \right] \frac{b^2}{\beta^2} \right\} \\ \leq c(b, \beta) \max \left\{ \frac{A^2}{(A^2 - r^2(x))^2}, \frac{A^3}{(A^2 - r^2(x))^2} \right\}.$$

Mit (113) aus dem Beweis von Satz 5.1. erhalten wir für $a \geq \max\{3R_0, 2\sqrt{2}r^2(x) + R_0, 2(1-r(x)) + R_0, 2(R_0 + 2r(x))\}$:

$$(125) \quad e(u)(x) \leq c(b, \beta) \frac{8}{a}.$$

Mit $a \rightarrow \infty$ folgt $e(u)(x) = 0$.

Es ist $e(u)(x) = 2\|Du(x)\|^2$; wir erhalten also wie beim Beweis von Satz 5.1.: $Du(x) = 0 \quad \forall x \in T_\infty(M)$, also $u \equiv \text{const.}$ in $T_\infty(M)$. Mit Lemma 5.1. folgt $u \equiv \text{const.}$ in M .

Damit ist Satz 5.3. bewiesen.

Bemerkung:

Der Beweis von Satz 5.3. folgt der Argumentation von H.I. Choi [9]. Darüber hinaus nutzen wir die spezielle Konstruktion der Hilfsfunktionen ϕ_a mittels der "Ausschneidefunktionen" η_a aus dem Beweis von Satz 5.1. aus. Diese Konstruktion garantiert uns eine Kontrolle über die Krümmungsterme in den Punkten $\bar{x} \in T_a(M)$.

6. Bemerkungen zur Anwendung: Liouville-Sätze und Brownsche Bewegung auf riemannschen Mannigfaltigkeiten

In diesem abschließenden Kapitel soll kurz auf die Verbindung zwischen Liouville-Sätzen für harmonische Funktionen bzw. Abbildungen und der Brownschen Bewegung auf riemannschen Mannigfaltigkeiten eingegangen werden.

Dabei soll keine Theorie der Brownschen Bewegung betrieben werden, vielmehr soll nur eine innermathematische Verbindung und Anwendung der in den Kapiteln 4 und 5 entwickelten Aussagen diskutiert werden.

Nach S.T. Yau [70] gilt der folgende

Satz 6.1.:

M sei eine m-dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit mit nach unten beschränkter Ricci-Krümmung. Dann ist der Laplace-Beltrami-Operator Δ_M auf M der Erzeuger einer (durch Übergangswahrscheinlichkeiten definierten) Halbgruppe T_t im folgenden Sinn:

Sei $u \in C(M)$ eine beschränkte stetige Funktion auf M. Dann ist $\Delta_M u$ (im schwachen, d.h. distributionstheoretischen Sinn) beschränkt genau dann, wenn

$$\frac{1}{t} (T_t u(x) - u(x))$$

Für $t \rightarrow 0$ auf beschränkten Mengen gleichmäßig konvergiert. In diesem Fall ist

$$\Delta_M u(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (T_t u(x) - u(x)) .$$

Definition 6.1.:

Die von Δ_M auf M erzeugte Halbgruppe auf M heißt Brownsche Halbgruppe. Der Markoff-Prozeß mit Zustandsraum M, dessen

Halbgruppe der Übergangswahrscheinlichkeiten die Brownsche Halbgruppe auf M ist und dessen Pfade stetig sind, heißt Brownscher Prozeß oder Brownsche Bewegung auf M .

Angeregt durch einen Beweis des kleinen Picard'schen Satzes (jede holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{+1\}$ ist konstant) mittels der Brownschen Bewegung auf $\mathbb{C}$ durch B. Davis [10] hat W.S. Kendall [47], [48] den Zusammenhang von Liouville-Sätzen für harmonische Abbildungen und Brownscher Bewegung auf riemannschen Mannigfaltigkeiten untersucht.

Definition 6.2.:

Sei M eine m -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit.

1. Eine Familie I von Teilmengen von $C([0, \infty), M)$, der Menge der Pfade der Brownschen Bewegung auf M , heißt invariantes σ -Feld der Brownschen Bewegung, wenn gilt:

$A \in I : \Leftrightarrow \forall \omega \in A, \omega: [0, \infty) \rightarrow M$ stetiger Pfad der Brownschen Bewegung auf M , gilt: $\omega_s \in A \quad \forall s \geq 0$ mit
 $\omega_s: [0, \infty) \rightarrow M$ um $\omega_s(t) := \omega(s+t)$.

2. Die Brownsche Bewegung X auf M erfüllt ein 0-1-Gesetz auf dem invarianten σ -Feld I , wenn gilt:

$P(X \in A) = 0$ oder $P(X \in A) = 1 \quad \forall A \in I$.

Nach W.S. Kendall [48], S. 753 gilt das

Lemma 6.1.:

Sei M eine m -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Brownsche Bewegung X auf M erfüllt ein 0-1-Gesetz, falls es auf M keine nicht konstante, beschränkte harmonische Funktion gibt.

Damit erhalten wir mit den Ergebnissen des 4. und 5. Kapitels

Satz 6.2.:

M sei eine m -dimensionale, vollständige, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit. Es gelte entweder

1. Die Ricci-Krümmung von M ist nicht negativ oder
2. Es gibt eine beschränkte Teilmenge $\Omega \subseteq M$ mit

$$\text{ric}_x(v) \geq 0 \quad \forall x \in M \setminus \Omega, v \in T_x M$$

Dann gilt:

Die Brownsche Bewegung X auf M erfüllt ein 0-1-Gesetz.

Beweis:

1. Nach Satz 4.1. (S.T. Yaus Liouville-Satz) ist für $\text{Ric}(M) \geq 0$ jede beschränkte harmonische Funktion auf M konstant. Lemma 6.1. ergibt dann die Behauptung.
2. Folgt aus Lemma 6.1. und Korollar 5.1. .

Zur Formulierung weiterer Ergebnisse benötigen wir

Definition 6.3.:

(M, g) , (N, γ) seien endlich dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $u \in C^2(M, N)$ hat K -beschränkte Dilation, falls für die $n = \dim N$ Eigenwerte $\lambda_1(z) \geq \lambda_2(z) \geq \dots \geq \lambda_n(z) \geq 0$ der quadratischen Form

$$(a_{\alpha\beta})_{1 \leq \alpha, \beta \leq n} := (g^{ij} D_i u^\alpha D_j u^\beta)_{1 \leq \alpha, \beta \leq n}$$

bezügliche der Metrik auf N , also für die n Wurzeln der Gleichung $\det(\lambda \gamma_{\alpha\beta} - a_{\alpha\beta}) = 0$, gilt:

$$\lambda_1(z) \leq K^2 \lambda_2(z) \quad \forall z \in M.$$

W.S. Kendall [48], S. 759 beweist folgenden Liouville-Satz

Satz 6.3.:

M sei eine m -dimensionale, vollständige, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

Die Brownsche Bewegung X auf M erfülle ein 0-1-Gesetz.

N sei eine n -dimensionale, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Schnittkrümmung die Abschätzung

$-L^2 \leq S_N(z)(v,w) \leq -H^2 \quad \forall z \in N, v,w \in T_z N$ mit reellen Konstanten L, H erfüllt.

Dann gilt:

Jede harmonische Abbildung $u \in C^2(M, N)$ mit K -beschränkter Dilatation ist konstant.

Bemerkung:

Satz 6.3. von W.S. Kendall ist eine wahrscheinlichkeitstheoretische Variante des Liouville-Satzes von S.I. Goldberg, T. Ishihara und N.C. Petridis [19].

Weitere Liouville-Sätze für harmonische Abbildungen mit K -beschränkter Dilatation beweisen S.I. Goldberg, T. Ishihara [18] und S.I. Goldberg [20].

Aus Satz 6.2. und Satz 6.3. erhalten wir insgesamt

Satz 6.4.:

M sei eine m -dimensionale, vollständige, zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit.

Es gibt eine beschränkte Teilmenge $\Omega \subseteq M$ mit

$$\text{ric}_x(v) \geq 0 \quad \forall x \in M \setminus \Omega, v \in T_x M.$$

N sei eine n -dimensionale, zusammenhängende riemannsche Mannig-

faltigkeit, deren Schnittkrümmung die Abschätzung

$$-L^2 \leq S_N(z)(v,w) \leq -H^2 \quad \forall z \in N, vw \in T_z N \text{ mit reellen Konstanten } L, H \text{ erfüllt.}$$

Dann gilt:

Jede harmonische Abbildung $u \in C^2(M, N)$ mit K -beschränkter Dilation ist konstant.

7. Anhang

7.1. Einige Hilfssätze

Hilfssatz 1:

Sei M eine m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit metrischem Tensor g .

Sei $a \in T^{0,2}(M)$; dann gilt für die Spur von a bezüglich g

$$\text{Sp}_M a = \sum_{i,j=1}^m g^{ji} a_{ij}.$$

Dabei ist $a = a_{ij} \theta_i \otimes \theta_j$ und $g = g_{ij} \theta_i \otimes \theta_j$ die Darstellung von a und g bezüglich lokaler Koordinaten und $(g^{ij}) := (g_{ij})^{-1}$.

Beweis:

1. Wir schreiben für die lokale Darstellung $a = a_{ij} \theta_i \otimes \theta_j$ und $g = g_{ij} \theta_i \otimes \theta_j$ kurz $a = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$, $g = (g_{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$ und setzen $g^{-1} := (g_{ij})^{-1}_{1 \leq i, j \leq m} := (g^{ij})_{1 \leq i, j \leq m}$.

2. $\text{Sp}_M a$ ist die Summe der m reellen Eigenwerte von a relativ zu g , d.h. die Summe der m reellen Lösungen $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ der Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \det(a_{ij} - \lambda g_{ij}) \\ &= \det(a - \lambda g) \\ &= (\det g) \det(g^{-1}(a - \lambda g)) \\ &= (\det g) \det(g^{-1}a - \lambda \text{id}). \end{aligned}$$

Da g metrischer Tensor ist, gilt $\det g \neq 0$. Also ist λ Lösung von $0 = \det(g^{-1}a - \lambda \text{id})$, λ ist also Eigenwert von $g^{-1}a$ und man erhält: λ_i , $1 \leq i \leq m$, Eigenwerte von $g^{-1}a$ und damit

$$\operatorname{Sp}_M^a = \sum_{i=1}^m \lambda_i = \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}^m} (g^{-1}a) = \sum_{i,j=1}^m g^{ji} a_{ij} ,$$

$$\text{denn } (g^{-1}a)_{j\ell} = g^{ji} a_{i\ell} , \operatorname{Sp}_{\mathbb{R}^m} (g^{-1}a) = \sum_{j=1}^m (g^{-1}a)_{jj} = \sum_{i,j=1}^m g^{ji} a_{ij}$$

Hilfssatz 2:

Sei M eine m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit metrischem Tensor g und Levi-Civita-Zusammenhang (riemannschen Zusammenhang) ∇ .

Die 3-lineare Abbildung $R : V(M) \times V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$ sei definiert durch

$$R(u,v)w := \nabla_u \nabla_v w - \nabla_v \nabla_u w - \nabla_{[u,v]} w , \quad \forall u,v,w \in V(M) ,$$

und der Krümmungstensor (Tensorfeld) $R \in T^{0,4}(M)$ sei gegeben durch

$$R(v_1, v_2, v_3, v_4) := g(R(v_3, v_4)v_2, v_1) \quad \forall v_i \in V(M), \quad 1 \leq i \leq 4.$$

Dann gilt für $v_i \in V(M)$, $1 \leq i \leq 4$:

$$(1) \quad R(v_1, v_2)v_3 = -R(v_2, v_1)v_3$$

$$(2) \quad R(v_1, v_2)v_3 + R(v_2, v_3)v_1 + R(v_3, v_1)v_2 = 0$$

$$(3) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_2, v_1, v_3, v_4)$$

$$(4) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) = R(v_4, v_3, v_2, v_1)$$

$$(5) \quad R(v_1, v_2, v_3, v_4) = -R(v_1, v_2, v_4, v_3)$$

$$(6) \quad R_{ijk}^\ell = -R_{jik}^\ell , \quad R_{ijk}^\ell = -R_{ij\ell}^k , \quad R_{ijk}^\ell = R_{k\ell i} , \quad 1 \leq i, j, k, \ell \leq m .$$

Beweis:

1. (1) und (2): vgl. D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 91, Lemma (1), (2).

2. (3) und (4): Mit D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 91 Lemma (3), (4) erhält man:

$$\begin{aligned} R(v_1, v_2, v_3, v_4) &= g(R(v_3, v_4)v_2, v_1) = -g(R(v_3, v_4)v_1, v_2) \\ &= -R(v_2, v_1, v_3, v_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(v_1, v_2, v_3, v_4) &= g(R(v_3, v_4)v_2, v_1) = g(R(v_2, v_1)v_3, v_4) \\ &= R(v_4, v_3, v_2, v_1) . \end{aligned}$$

3. Mit (1) erhalten wir

$$\begin{aligned} R(v_1, v_2, v_3, v_4) &= g(R(v_3, v_4)v_2, v_1) = -g(R(v_4, v_3)v_2, v_1) \\ &= -R(v_1, v_2, v_4, v_3) , \end{aligned}$$

das ist gerade Behauptung (5).

4. Sei $\{E_1, \dots, E_m\}$ ein ON-Basisfeld auf M , dann ist $R(E_i, E_j)E_k = R_{ijk}^n E_n$ und wegen der Orthonormalität:

$$\begin{aligned} R_{ijk}^\ell &= g(R(E_i, E_j)E_k, E_\ell) \\ &= R(E_\ell, E_k, E_i, E_j) \\ &= -R(E_\ell, E_k, E_j, E_i) \quad \text{mit (5)} \\ &= -g(R(E_j, E_i)E_k, E_\ell) \\ &= -R_{jik}^\ell ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{ijk}^\ell &= g(R(E_i, E_j)E_k, E_\ell) \\ &= R(E_\ell, E_k, E_i, E_j) \\ &= -R(E_k, E_\ell, E_i, E_j) \quad \text{mit (3)} \\ &= -g(R(E_i, E_j)E_\ell, E_k) = -R_{ij\ell}^k ; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_{ijk}^{\ell} &= g(R(E_i, E_j)E_k, E_{\ell}) \\
 &= R(E_{\ell}, E_k, E_i, E_j) \\
 &= R(E_j, E_i, E_k, E_{\ell}) \quad \text{mit (4)} \\
 &= g(R(E_k, E_{\ell})E_i, E_j) \\
 &= R_{k\ell i}^j ; \text{ damit ist (6) bewiesen.}
 \end{aligned}$$

Hilfssatz 3:

Sei M eine m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit metrischem Tensor g und Levi-Civita-Zusammenhang ∇ .

Dann gilt für den Ricci-Tensor Ric , definiert durch

$$\text{Ric}(v, w) := \text{Sp}_M(u \rightarrow R(u, v)w)$$

mit $u, v, w \in \mathcal{V}(M)$:

- (1) $\text{Ric} \in T^{0,2}(M)$, in lokaler Darstellung bezüglich des Basisfelds $\{E_1, \dots, E_m\}$ von M gilt (mit dualer Basis $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$):

$$\text{Ric} = \text{Ric}_{ij} \theta_i \otimes \theta_j \quad \text{mit} \quad \text{Ric}_{ij} = \text{Ric}(E_i, E_j) = g^{\ell k} R_{kij}^{\ell}.$$

- (2) $\text{Ric} \in T^{0,2}(M)$ ist ein symmetrischer Tensor, also $\text{Ric}_{ij} = \text{Ric}_{ji}$.

- (3) Es gilt (mit Summationskonvention!)

$$g^{\ell k} R_{lik}^n = - \text{Ric}_{ni} = - \text{Ric}_{in}.$$

Beweis:

1. Wegen der 3-Linearität der Abbildung R und der Linearität der Spurbildung ist $\text{Ric}(\cdot, \cdot)$ in beiden Argumenten linear, also $\text{Ric} : M \rightarrow (TM \otimes TM)^*$, d.h. $\text{Ric} \in T^{0,2}(M)$.

Da $\{E_1, \dots, E_m\}$ und $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ zueinander duale Basen mit $\theta_i(E_j) = \delta_{ij}$, $1 \leq i, j \leq m$, sind, gilt $\text{Ric} = \text{Ric}_{ij} \theta_i \otimes \theta_j$ und $\text{Ric}_{ij} = \text{Ric}(E_i, E_j)$.

Nach Definition ist $\text{Ric}(E_i, E_j) = \text{Sp}_M(u \rightarrow R(u, E_i)E_j)$.

Bezüglich der Basis $\{E_1, \dots, E_m\}$ wird die lineare Abbildung $u \rightarrow R(u, E_i)E_j$ dargestellt durch die $(m \times m)$ -Matrix $A = (a_{k\ell})$

mit $a_{k\ell} = R_{kij}^\ell$, denn $E_k \rightarrow R(E_k, E_i)E_j = R_{kij}^\ell E_\ell$.

Nach Hilfssatz 1 erhalten wir

$$\text{Ric}(E_i, E_j) = \text{Sp}_M(u \rightarrow R(u, E_i)E_j) = \text{Sp}_M A = g^{\ell k} a_{k\ell} = g^{\ell k} R_{kij}^\ell.$$

Damit ist (1) bewiesen.

2. Mit Hilfssatz 2, (6) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \text{Ric}_{ij} &= g^{\ell k} R_{kij}^\ell = -g^{\ell k} R_{ikj}^\ell \\ &= -g^{\ell k} R_{j\ell i}^k \\ &= -g^{k\ell} R_{j\ell i}^k \\ &= g^{k\ell} R_{\ell j i}^k \\ &= g^{\ell k} R_{kji}^\ell \quad (\text{mit Indexumbenennung } k \leftrightarrow \ell) \\ &= \text{Ric}_{ji}, \end{aligned}$$

damit ist (2) gezeigt.

3. Mit Hilfssatz 2, (6) folgt:

$$\begin{aligned} g^{\ell k} R_{\ell i k}^n &= -g^{\ell k} R_{\ell i n}^k \\ &= -g^{k\ell} R_{\ell i n}^k \\ &= -\text{Ric}_{ni} = -\text{Ric}_{in} \quad (\text{mit (2)}) . \end{aligned}$$

Damit ist Hilfssatz 3 vollständig bewiesen.

Hilfssatz 4:

M sei eine m-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Civita-Zusammenhang M_V und Basisfeld $\{E_1, \dots, E_m\}$; das zugeordnete duale Basisfeld bezeichnen wir mit $\{\theta_1, \dots, \theta_m\}$. N sei eine n-dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit Zusammenhang N_V und Basisfeld $\{e_1, \dots, e_n\}$.

$M_{\Gamma_{ij}}^k$, $1 \leq i, j, k \leq m$, sind die Christoffel-Symbole auf M;

$N_{\Gamma_{\beta\gamma}}^\alpha$, $1 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq n$, sind die Christoffel-Symbole auf N.

Sei $u \in C^r(M, N)$, $r \geq 3$, und $W = u^*(TN)$ das mittels u von TN induzierte n-dimensionale Bündel über M mit linearem Zusammenhang (Kovariante Ableitung)

$$W_V : V(M) \times T^{0,1}(M, W) \rightarrow T^{0,1}(M, W)$$

definiert durch

$$W_{V\omega} := \{ M_{V\omega}^\alpha + W_{\beta i}^\alpha \theta_i \omega^\beta \} e_\alpha, \quad \omega \in T^{0,1}(M, W)$$

$$W_{L\beta i}^\alpha := N_{\beta\gamma}^\alpha u_i^\gamma.$$

Für die W-wertige 1-Form $du = u_j^\alpha \theta_j e_\alpha$ (Summationskonvention!) gilt dann mit $W_{V_i} \omega := W_{V E_i} \omega$, $1 \leq i \leq m$, $\omega \in T^{0,1}(M, W)$:

$$(1) \quad W_{V_i}(du) = \{ D_i D_j u^\gamma - M_{ij}^k u_k^\gamma + N_{\alpha\beta}^\gamma u_i^\alpha u_j^\beta \} \theta_j e_\gamma$$

also

$$W_V(du) = \{ D_i D_j u^\gamma - M_{ij}^k u_k^\gamma + N_{\alpha\beta}^\gamma u_i^\alpha u_j^\beta \} \theta_i \otimes \theta_j e_\gamma.$$

$$(2) \quad W_{V_k}(W_{V_i}(du)) = \{ D_k D_i D_j u^\gamma - M_{ij}^\ell u_{\ell k}^\gamma - M_{kj}^\ell u_{\ell i}^\gamma +$$

$$\begin{aligned}
 & + N_{\Gamma\alpha\beta}^{\gamma} u_{ik}^{\beta} u_j^{\alpha} + N_{\Gamma\alpha\beta}^{\gamma} u_i^{\beta} u_{jk}^{\alpha} + N_{\Gamma\beta\gamma}^{\alpha} u_k^{\gamma} u_{ji}^{\beta} \\
 & - M_{\Gamma kj}^{\ell} N_{\Gamma\alpha\gamma}^{\gamma} u_i^{\gamma} u_{\ell}^{\alpha} - M_{\Gamma ij}^{\ell} N_{\Gamma\alpha\gamma}^{\gamma} u_{\ell}^{\gamma} u_k^{\alpha} \\
 & - D_k (M_{\Gamma ij}^{\ell}) u_{\ell}^{\gamma} + M_{\Gamma kj}^n M_{\Gamma ni}^{\ell} u_{\ell}^{\gamma} \\
 & + D_{\tau} (N_{\Gamma\alpha\beta}^{\gamma}) u_k^{\tau} u_i^{\beta} u_j^{\alpha} + N_{\Gamma\mu\tau}^{\gamma} N_{\Gamma\alpha\beta}^{\mu} u_k^{\tau} u_i^{\beta} u_j^{\alpha} \} \theta_j e_{\gamma}
 \end{aligned}$$

$$=: u_{j,i,k}^{\gamma} \theta_j e_{\gamma}$$

also

$$W_{\nabla}(W_{\nabla i}(du)) = u_{j,i,k}^{\gamma} \theta_k \otimes \theta_j e_{\gamma}$$

$$W_{\nabla}(W_{\nabla}(du)) = u_{j,i,k}^{\gamma} \theta_k \otimes \theta_i \otimes \theta_j e_{\gamma}.$$

Beweis:

1. Grundsätzlich werden alle Bezeichnungen wie in Abschnitt 2.1., 2.2. dieser Arbeit vereinbart benutzt. Insbesondere (15) - (21) zur Definition von $M_{\nabla} : V(M) \times V(M) \rightarrow V(M)$ und Definition 2.1. für $M_{\nabla} : V(M) \times T^{r,s}(M) \rightarrow T^{r,s}(M)$ sowie (41) - (44) zur Definition von $W_{\nabla} : V(M) \times T^{o,1}(M,W) \rightarrow T^{o,1}(M,W)$.

Es sei nochmals auf die Summationskonvention hingewiesen:

Über doppelt auftretende lateinische Indizes wird von 1 bis m summiert, über doppelt auftretende griechische Indizes wird von 1 bis n summiert.

2. Nach Definition von W_{∇} in Abschnitt 2.2., (42), gilt:

$$W_{\nabla i}(du)(E_k) = \{ M_{\nabla i}^{\alpha}(du)^{\alpha}(E_k) + W_{L\beta i}^{\alpha}(du)^{\beta}(E_k) \} e_{\alpha}$$

$$\text{mit } (du)^{\alpha} = u_j^{\alpha} \theta_j.$$

Mit Definition 2.1. und (15) - (21) erhalten wir:

$$M_{\nabla i}^{\alpha}(du)^{\alpha}(E_k) = M_{\nabla i}^{\alpha}(u_j^{\alpha} \theta_j)(E_k)$$

$$\begin{aligned}
 &= u_{ji}^{\alpha} \theta_j(E_k) + u_j^{\alpha M_{\nabla i}} \theta_j(E_k) \\
 &= u_{ki}^{\alpha} + u_j^{\alpha E_i}(\theta_j(E_k)) - u_j^{\alpha} \theta_j(M_{\nabla i} E_k) \\
 &= u_{ki}^{\alpha} - u_j^{\alpha} \theta_j(M_{\Gamma_{ik}}^{\ell} E_{\ell}) \quad , \quad \text{da } E_i(\theta_j(E_k)) = 0 \\
 &= u_{ki}^{\alpha} - u_j^{\alpha M_{\Gamma_{ik}}^j} ;
 \end{aligned}$$

mit (43) erhält man

$$W_{L_{\beta i}}^{\alpha}(du)^{\beta}(E_k) = N_{\Gamma_{\beta\gamma}}^{\alpha} u_i^{\gamma} u_j^{\beta} \theta_j(E_k) = N_{\Gamma_{\beta\gamma}}^{\alpha} u_i^{\gamma} u_k^{\beta}$$

also insgesamt

$$W_{\nabla i}(du)(E_k) = \{ u_{ki}^{\alpha} - u_j^{\alpha M_{\Gamma_{ik}}^j} + N_{\Gamma_{\beta\gamma}}^{\alpha} u_i^{\gamma} u_k^{\beta} \} e_{\alpha}$$

und nach einer Indexumbenennung ($k \leftrightarrow j$, $\alpha \leftrightarrow \gamma$):

$$W_{\nabla i}(du)(E_j) = \{ D_i D_j u^{\gamma} - M_{\Gamma_{ij}}^k u_k^{\gamma} + N_{\Gamma_{\alpha\beta}}^{\gamma} u_i^{\alpha} u_j^{\beta} \} e_{\gamma}$$

also

$$W_{\nabla i}(du) = \{ D_i D_j u^{\gamma} - M_{\Gamma_{ij}}^k u_k^{\gamma} + N_{\Gamma_{\alpha\beta}}^{\gamma} u_i^{\alpha} u_j^{\beta} \} \theta_j e_{\gamma}$$

und

$$W_{\nabla}(du) = \{ D_i D_j u^{\gamma} - M_{\Gamma_{ij}}^k u_k^{\gamma} + N_{\Gamma_{\alpha\beta}}^{\gamma} u_i^{\alpha} u_j^{\beta} \} \theta_i \otimes \theta_j e_{\gamma} ;$$

damit ist Behauptung (1) bewiesen.

3. Wir setzen $W_{\nabla i}(du) = u_{,j,i}^{\gamma} \theta_j e_{\gamma}$ mit

$$u_{,j,i}^{\gamma} := \{ D_i D_j u^{\gamma} - M_{\Gamma_{ij}}^k u_k^{\gamma} + N_{\Gamma_{\alpha\beta}}^{\gamma} u_i^{\alpha} u_j^{\beta} \}$$

dann ist

$$W_{\nabla k} (W_{\nabla i} (du)) (E_j) = \{ M_{\nabla k} (W_{\nabla i} (du))^\gamma (E_j) + W_{L\beta k}^\gamma (W_{\nabla i} (du))^\beta (E_j) \} e_\gamma.$$

Im folgenden berechnen wir die einzelnen Terme:

3.1.

$$\begin{aligned} W_{L\beta k}^\gamma (W_{\nabla i} (du))^\beta (E_j) &= N_{\Gamma\beta\nu}^\gamma u_k^\nu u_{\ell,i}^\beta \theta_\ell (E_j) \quad , \text{ mit (43)} \\ &= N_{\Gamma\beta\nu}^\gamma u_k^\nu u_{j,i}^\beta \\ &= N_{\Gamma\beta\nu}^\gamma u_k^\nu u_{ij}^\beta - N_{\Gamma\beta\nu}^\gamma M_{\Gamma ij}^\ell u_k^\nu u_\ell^\beta + N_{\Gamma\beta\nu}^\gamma N_{\Gamma\mu\tau}^\beta u_i^\mu u_j^\tau u_k^\nu ; \end{aligned}$$

3.2.

$$\begin{aligned} M_{\nabla k} (W_{\nabla i} (du))^\gamma (E_j) &= M_{\nabla k} (u_{\ell,i}^\gamma \theta_\ell) (E_j) \\ &= E_k (u_{j,i}^\gamma) + u_{\ell,i}^\gamma M_{\nabla k} \theta_\ell (E_j) \\ &= E_k (u_{j,i}^\gamma) + E_k (\theta_\ell (E_j)) u_{\ell,i}^\gamma - \theta_\ell (M_{\nabla k} E_j) u_{\ell,i}^\gamma \\ &= E_k (u_{j,i}^\gamma) - M_{\Gamma kj}^\ell u_{\ell,i}^\gamma \end{aligned}$$

dabei ist (man beachte $E_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ in diesen lokalen Koordinaten)

$$\begin{aligned} E_k (u_{j,i}^\gamma) &= u_{jik}^\gamma - M_{\Gamma ij}^\ell u_{\ell k}^\gamma - D_k (M_{\Gamma ij}^\ell) u_\ell^\gamma + D_\tau (N_{\Gamma\alpha\beta}^\gamma) u_k^\tau u_i^\beta u_j^\alpha \\ &\quad + N_{\Gamma\alpha\beta}^\gamma u_{ik}^\beta u_j^\alpha + N_{\Gamma\alpha\beta}^\gamma u_{ij}^\beta u_k^\alpha ; \end{aligned}$$

damit folgt insgesamt (mit Indexumbenennung):

$$\begin{aligned} M_{\nabla k} (W_{\nabla i} (du))^\gamma (E_j) &= \{ D_k D_j D_i u^\gamma - M_{\Gamma ij}^\ell u_{\ell k}^\gamma - D_k (M_{\Gamma ij}^\ell) u_\ell^\gamma \\ &\quad + D_\tau (N_{\Gamma\alpha\beta}^\gamma) u_k^\tau u_i^\beta u_j^\alpha + N_{\Gamma\alpha\beta}^\gamma u_{ik}^\beta u_j^\alpha + N_{\Gamma\alpha\beta}^\gamma u_{ij}^\beta u_k^\alpha - M_{\Gamma kj}^\ell u_{\ell i}^\gamma \\ &\quad + M_{\Gamma kj}^\ell M_{\Gamma i\ell}^\alpha u_n^\gamma - M_{\Gamma kj}^\ell N_{\Gamma\alpha\beta}^\gamma u_i^\alpha u_\ell^\beta \} e_\gamma . \end{aligned}$$

Aus 3.1. und 3.2. erhalten wir (mit evtl. Indexumbenennung):

$$\begin{aligned} W_{\nabla_k}(W_{\nabla_i}(du))(E_j) = & \{ D_k D_j D_i u^\gamma - M_{\Gamma_{ij}}^\ell u_{\ell k}^\gamma - M_{\Gamma_{kj}}^\ell u_{\ell i}^\gamma \\ & + N_{\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma u_{ik}^\beta u_j^\alpha + N_{\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma u_{ij}^\beta u_k^\alpha + N_{\Gamma_{\beta\gamma}}^\gamma u_k^\beta u_{ji}^\gamma \\ & - M_{\Gamma_{kj}}^\ell N_{\Gamma_{\alpha\gamma}}^\gamma u_i^\beta u_\ell^\alpha - M_{\Gamma_{ij}}^\ell N_{\Gamma_{\alpha\gamma}}^\gamma u_k^\beta u_\ell^\alpha \\ & - D_k (M_{\Gamma_{ij}}^\ell) u_\ell^\gamma + M_{\Gamma_{kj}}^\ell M_{\Gamma_{ni}}^\ell u_\ell^\gamma \\ & + D_\tau (N_{\Gamma_{\alpha\beta}}^\gamma) u_k^\tau u_i^\beta u_j^\alpha + N_{\Gamma_{\mu\tau}}^\gamma N_{\Gamma_{\alpha\beta}}^\mu u_k^\tau u_i^\beta u_j^\alpha \} e_\gamma, \end{aligned}$$

also ist gezeigt

$$W_{\nabla_k}(W_{\nabla_i}(du))(E_j) = u_{j,i,k}^\gamma e_\gamma \quad \text{also}$$

$$W_{\nabla_k}(W_{\nabla_i}(du)) = u_{j,i,k}^\gamma \theta_j e_\gamma$$

$$W_{\nabla}(W_{\nabla_i}(du)) = u_{j,i,k}^\gamma \theta_k \otimes \theta_j e_\gamma$$

$$W_{\nabla}(W_{\nabla}(du)) = u_{j,i,k}^\gamma \theta_k \otimes \theta_i \otimes \theta_j e_\gamma; \text{ damit ist Hilfssatz 4}$$

bewiesen.

Hilfssatz 5:

Sei $u \in C^r(M, N)$, dann gilt für die kovarianten Ableitungen von u^γ , $1 \leq \gamma \leq n$:

$$(1) \text{ mit } r \geq 2: u_{i,j}^\gamma = u_{j,i}^\gamma, \quad 1 \leq i, j \leq m;$$

$$(2) \text{ mit } r \geq 3: u_{j,i,k}^\gamma - u_{j,k,i}^\gamma = u_\ell^\gamma R_{ikj}^\ell + N_{\tau\beta\alpha}^\gamma u_k^\tau u_i^\beta u_j^\alpha.$$

Beweis:

1. Wegen $u \in C^r(M, N)$, $r \geq 2$, gilt für die gewöhnlichen partiellen Ableitungen $u_{ij}^\gamma = u_{ji}^\gamma$, mit den Symmetrieeigenschaften der Christoffelsymbole folgt dann sofort (mit Indexumbenennung im letzten Term):

$$\begin{aligned} u_{i,j}^\gamma &= u_{ij}^\gamma - M_{\Gamma ij}^k u_k^\gamma + N_{\Gamma \alpha \beta}^\gamma u_i^\alpha u_j^\beta \\ &= u_{ji}^\gamma - M_{\Gamma ji}^k u_k^\gamma + N_{\Gamma \alpha \beta}^\gamma u_j^\alpha u_i^\beta \\ &= u_{j,i}^\gamma. \end{aligned}$$

2. Nach Definition 2.10. (3) und dem Beweis von Hilfssatz 4 erhalten wir (mit evtl. Indexumbenennung):

$$\begin{aligned} u_{j,k,i}^\gamma e_\gamma &= W_{\nabla i} (W_{\nabla k} (du)^\gamma) (E_j) \\ &= \{ u_{jki}^\gamma - M_{\Gamma kj}^\ell u_{\ell i}^\gamma - M_{\Gamma ij}^\ell u_{\ell k}^\gamma + N_{\Gamma \alpha \beta}^\gamma u_{ki}^\beta u_j^\alpha + N_{\Gamma \beta \gamma}^\gamma u_{ji}^\beta u_k^\alpha \\ &\quad + N_{\Gamma \alpha \beta}^\gamma u_{jk}^\alpha u_i^\beta - M_{\Gamma ij}^n N_{\Gamma \alpha \nu}^\gamma u_k^\nu u_n^\alpha - M_{\Gamma kj}^n N_{\Gamma \alpha \nu}^\gamma u_i^\nu u_n^\alpha \\ &\quad - D_i (M_{\Gamma kj}^\ell) u_\ell^\gamma + M_{\Gamma ij}^n M_{\Gamma nk}^\ell u_\ell^\gamma \\ &\quad + D_\beta (N_{\Gamma \alpha \tau}^\gamma) u_i^\beta u_k^\tau u_j^\alpha + N_{\Gamma \mu \beta}^\gamma N_{\Gamma \alpha \tau}^\mu u_i^\beta u_k^\tau u_j^\alpha \} e_\gamma. \end{aligned}$$

Zusammen mit dem Ausdruck für $u_{j,i,k}^\gamma$ aus Definition 2.10. (3) bzw. Hilfssatz 4 und der Symmetrie der dritten gewöhnlichen partiellen Ableitungen (nach Voraussetzung ist $u \in C^r(M, N)$, $r \geq 3$) und der Christoffelsymbole erhalten wir:

$$\begin{aligned} u_{j,i,k}^\gamma - u_{j,k,i}^\gamma &= u_\ell^\gamma \{ D_i (M_{\Gamma kj}^\ell) - D_k (M_{\Gamma ij}^\ell) \\ &\quad + M_{\Gamma kj}^n M_{\Gamma ni}^\ell - M_{\Gamma ij}^n M_{\Gamma nk}^\ell \} \end{aligned}$$

$$+ \{ - D_{\beta} (N_{\Gamma \alpha \tau}^{\gamma}) + D_{\tau} (N_{\Gamma \alpha \beta}^{\gamma}) + N_{\Gamma \mu \tau}^{\gamma} N_{\Gamma \alpha \beta}^{\mu} - N_{\Gamma \mu \beta}^{\gamma} N_{\Gamma \alpha \tau}^{\mu} \} u_k^{\tau} u_i^{\beta} u_j^{\alpha} ;$$

mit der Definition der Komponenten der entsprechenden Krümmungstensoren auf M bzw. N (vgl. Abschnitt 2.1. (31) oder D. Gromoll, W. Klingenberg, W. Meyer [23], S. 41) und Hilfssatz 2, (6) folgt schließlich:

$$\begin{aligned} u_{j,i'k}^{\gamma} - u_{j,k'i}^{\gamma} &= u_{\ell}^{\gamma M \ell} R_{ikj} - N_{R_{\beta \tau \alpha}}^{\gamma} u_k^{\tau} u_i^{\beta} u_j^{\alpha} \\ &= u_{\ell}^{\gamma M \ell} R_{ikj} + N_{R_{\tau \beta \alpha}}^{\gamma} u_k^{\tau} u_i^{\beta} u_j^{\alpha} . \end{aligned}$$

Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Hilfssatz 6:

Sei M eine m -dimensionale riemannsche Mannigfaltigkeit mit metrischem Tensor g und Levi-Civita-Zusammenhang M_{∇} .

$\{E_1, \dots, E_m\}$ sei ein Basisfeld auf M , das in lokalen Koordinaten die Darstellung $E_i = D_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq m$, hat.

Sei $f \in C^r(M)$, $r \geq 2$, dann gilt mit $E_i(f) := f_i$, $E_i(E_j(f)) := f_{ji}$

- (1) Für den zugehörigen Hesse-Tensor $H_f \in T^{0,2}(M)$ von f erhält man

$$H_f(E_i, E_j) = E_i(E_j(f)) - M_{\nabla E_i E_j}^f, \quad 1 \leq i, j \leq m .$$

- (2) Für den Laplace-Beltrami-Operator Δ_M auf M erhält man

$$\begin{aligned} \Delta_M f &:= \text{Sp}_M H_f = g^{ij} \{ E_i(E_j(f)) - M_{\nabla E_i E_j}^f \} \\ &= g^{ij} \{ f_{ji} - M_{ij}^{k} f_k \} \\ &= g^{ji} \{ f_{ji} - M_{ji}^{k} f_k \} \\ &= g^{ij} \{ f_{ij} - M_{ij}^{k} f_k \} . \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} D_i \{ \sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} D_j f \}$$

Beweis:

1. Den Bezeichnungen von Abschnitt 3.2. entsprechend gilt

$$H_f(E_i, E_j) = g(M_{\nabla E_i} Df, E_j) \text{ mit } Df = (g^{\ell s} f_{\ell}) E_s \text{ also:}$$

$$\begin{aligned} H_f(E_i, E_j) &= g^{\ell s} g_{sj} E_i(f_{\ell}) + f_{\ell} g_{sj} E_i(g^{\ell s}) + g^{\ell s} f_{\ell} M_{is}^n g_{nj} \\ &= E_i(f_j) + f_{\ell} g^{\ell s} M_{is}^n g_{nj} + f_{\ell} g_{sj} E_i(g^{\ell s}) \\ &= E_i(E_j(f)) + f_{\ell} g^{\ell s} M_{is}^n g_{nj} + f_{\ell} g_{sj} E_i(g^{\ell s}) . \end{aligned}$$

Mit

$$E_i(g^{\ell s}) = -g^{sk} M_{ki}^{\ell} - g^{\ell n} M_{ni}^s \text{ erhalt man}$$

$$\begin{aligned} f_{\ell} g_{sj} E_i(g^{\ell s}) &= -f_{\ell} g_{js} g^{sk} M_{ki}^{\ell} - f_{\ell} g^{\ell n} g_{sj} M_{ni}^s \\ &= -f_{\ell} M_{ji}^{\ell} - f_{\ell} g^{\ell n} g_{sj} M_{ni}^s \text{ also} \end{aligned}$$

$$H_f(E_i, E_j) = E_i(E_j(f)) + f_{\ell} g^{\ell s} M_{is}^n g_{nj} - f_{\ell} M_{ji}^{\ell} - f_{\ell} g^{\ell n} g_{sj} M_{ni}^s .$$

Wegen der Symmetrieeigenschaften der Christoffelsymbole erhalt man nach einer Indexumbenennung ($s \leftrightarrow n$) im letzten Term:

$$\begin{aligned} H_f(E_i, E_j) &= E_i(E_j(f)) - M_{ji}^{\ell} f_{\ell} \\ &= E_i(E_j(f)) - M_{ij}^{\ell} E_{\ell}(f) \\ &= E_i(E_j(f)) - M_{\nabla E_i} E_j(f) . \end{aligned}$$

Damit ist (1) gezeigt.

2. Zur Definition von $\Delta_M^f := \text{Sp}_M H_f$ vergleiche man S. Kobayashi, K. Nomizu [50], S. 337.

Aus (1) sowie Hilfssatz 1 erhalten wir unter Beachtung der Symmetrieeigenschaften der Christoffelsymbole und wegen $f_{ij} = f_{ji}$ (da nach Voraussetzung $f \in C^r(M)$, $r \geq 2$) sofort:

$$\begin{aligned} \Delta_M^f &= \text{Sp}_M H_f = g^{ij} H_f(E_i, E_j) \\ &= g^{ij} \{ E_i(E_j(f)) - M_{E_i E_j}^V(f) \} \\ &= g^{ij} \{ f_{ji} - M_{ij}^k f_k \} \\ &= g^{ji} \{ f_{ji} - M_{ji}^k f_k \} \\ &= g^{ij} \{ f_{ij} - M_{ij}^k f_k \}. \end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} D_i \{ \sqrt{\det g_{ij}} g^{ij} D_j f \} &= E_i(g^{ij} E_j(f)) + \\ &\quad \frac{1}{\sqrt{\det g_{ij}}} E_i(\sqrt{\det g_{ij}}) g^{ij} E_j(f) \\ &= g^{ij} E_i(E_j(f)) + g^{ij} E_j(f) M_{li}^l + E_i(g^{ij} E_j(f)) \\ &= g^{ij} E_i(E_j(f)) + g^{ij} E_j(f) M_{li}^l - g^{ij} E_j(f) M_{li}^l - g^{ki} M_{ki}^j E_j(f) \\ &= g^{ij} E_i(E_j(f)) - g^{ki} M_{ki}^j E_j(f) \\ &= g^{ij} E_i(E_j(f)) - g^{ij} M_{ij}^k E_k(f) \quad (\text{mit Indexumbenennung im letzten Term}) \end{aligned}$$

$$= g^{ij} \{ E_i(E_j(f)) - M_{ij}^k f_k \}$$

$$= g^{ij} \{ f_{ji} - M_{ij}^k f_k \}$$

$$= g^{ij} \{ f_{ij} - M_{ij}^k f_k \}$$

$$= \Delta_M f.$$

Damit ist auch (2) bewiesen.

Hilfssatz 7:

M sei eine vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit der Dimension m mit Levi-Civita-Zusammenhang ∇ ; $x, x_0 \in M$.

Sei $c : [0, \ell] \rightarrow M$ die minimierende, normale Geodätische in M mit Anfangspunkt $x_0 = c(0)$ und Endpunkt $x = c(\ell) \in \exp_{x_0}(E(x_0))$.

Dann gilt mit $\dot{c}(x) := \dot{c}(\ell)$; r_M geodätischer Abstand zu x_0 :

$$Dr_M(x) = \dot{c}(x).$$

Beweis:

1. Wegen $x \in \exp_{x_0}(E(x_0))$ ist r_M nach Satz 3.1. differenzierbar in x , also existiert $Dr_M(x)$.

Nach Definition von $c : [0, \ell] \rightarrow M$ haben wir

$$\ell = r_M(x) = L(c) = \int_0^\ell \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle^{1/2} dt \text{ mit } 1 = \langle \dot{c}(t), \dot{c}(t) \rangle \text{ für alle } t \in [0, \ell].$$

2. Zu beliebigem aber für den Rest der Rechnung festem $w \in T_{x_0}M$ sei $h : [0, 1] \rightarrow M$ eine Geodätische mit

$$(1) \quad h(0) = x$$

$$(2) \quad \dot{h}(0) = w$$

$$(3) \quad h(s) \in \exp_{x_0}(E(x_0)) \quad \forall s \in [0, 1],$$

die Forderung (3) ist erfüllbar, da $\exp_{x_0}(E(x_0))$ offen ist.

Durch die folgende Variation $v : [0, \ell] \times [0, 1] \rightarrow M$ wird eine Homotopie von Wegen erklärt:

$$(4) \quad c_0 := v(\cdot, 0) := c : [0, \ell] \rightarrow M$$

(5) für alle $s \in (0, 1]$ ist $c_s := v(\cdot, s) : [0, \ell] \rightarrow M$ die proportional zur Bogenlänge parametrisierte Geodätische mit Anfangspunkt $c_s(0) = x_0$ und Endpunkt $c_s(\ell) = h(s)$.

Wir haben also

$$\begin{aligned} L(c_s) &= \int_0^\ell \langle \dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t) \rangle^{1/2} dt \\ &= \int_0^\ell \langle \partial_t v(t, s), \partial_t v(t, s) \rangle^{1/2} dt, \text{ mit } \partial_t := \frac{\partial}{\partial t}. \end{aligned}$$

Mit $\partial_s := \frac{\partial}{\partial s}$ und $\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}$ definieren wir die durch v induzierten Vektorfelder $S := v_*(\partial_s)$ und $T := v_*(\partial_t)$ auf M , dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(c_s) &= \int_0^\ell \frac{\partial}{\partial s} \langle \partial_t v(t, s), \partial_t v(t, s) \rangle^{1/2} dt \\ &= \int_0^\ell \frac{\langle \nabla_S \partial_t v(t, s), \partial_t v(t, s) \rangle}{\langle \partial_t v(t, s), \partial_t v(t, s) \rangle^{1/2}} dt. \end{aligned}$$

Da $c_s = v(\cdot, s)$ proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist, gilt:

$$\langle \dot{c}_s(t), \dot{c}_s(t) \rangle = \langle \partial_t v(t, s), \partial_t v(t, s) \rangle = \text{const.}(s) \quad \forall t \in [0, \ell]$$

und damit

$$L(c_s) = \int_0^\ell \langle \partial_t v(t, s), \partial_t v(t, s) \rangle^{1/2} dt = \ell \cdot \langle \partial_t v(t, s), \partial_t v(t, s) \rangle^{1/2}$$

also

$$\frac{d}{ds} L(c_s) = \int_0^{\ell} \frac{\langle \nabla_s \partial_t v(t,s), \partial_t v(t,s) \rangle}{L(c_s)} dt \quad \text{oder}$$

$$\frac{1}{\ell} L(c_s) \frac{d}{ds} L(c_s) = \int_0^{\ell} \langle \nabla_s \partial_t v(t,s), \partial_t v(t,s) \rangle dt.$$

Wegen der Torsionsfreiheit des Levi-Civita-Zusammenhangs ∇ gilt

$$\nabla_s \partial_t v(t,s) - \nabla_T \partial_s v(t,s) = v_*([\partial_t, \partial_s]) = 0$$

also

$$\nabla_s \partial_t v(t,s) = \nabla_T \partial_s v(t,s) \quad \text{und damit}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d}{ds} (L(c_s)^2) = \int_0^{\ell} \langle \nabla_T \partial_s v(t,s), \partial_t v(t,s) \rangle dt.$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \partial_s v(t,s), \partial_t v(t,s) \rangle &= \langle \nabla_T \partial_s v(t,s), \partial_t v(t,s) \rangle \\ &\quad + \langle \partial_s v(t,s), \nabla_T \partial_t v(t,s) \rangle \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d}{ds} (L(c_s)^2) &= \int_0^{\ell} \left\{ \frac{d}{dt} \langle \partial_s v(t,s), \partial_t v(t,s) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \partial_s v(t,s), \nabla_T \partial_t v(t,s) \rangle \right\} dt \\ &= \langle \partial_s v(t,s), \partial_t v(t,s) \rangle \Big|_{t=0}^{t=\ell} - \int_0^{\ell} \langle \partial_s v(t,s), \nabla_T \partial_t v(t,s) \rangle dt. \end{aligned}$$

Da $c_s = v(\cdot, s)$ Geodätische in M ist, gilt $\nabla_T \partial_t v(t,s) = 0$ und daher

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ell} \cdot \frac{d}{ds} (L(c_s)^2) = \left. \langle \partial_s v(t,s), \partial_t v(t,s) \rangle \right|_{t=0}^{t=\ell},$$

speziell also

$$\frac{1}{2\ell} \frac{d}{ds} (L(c_s)^2) \Big|_{s=0} = \langle \partial_s v(\ell, 0), \partial_t v(\ell, 0) \rangle - \langle \partial_s v(0, 0), \partial_t v(0, 0) \rangle$$

Nach Konstruktion der Variation v haben wir:

$$\partial_t v(0, 0) = \dot{c}_0(0) = \dot{c}(0)$$

$$\partial_t v(\ell, 0) = \dot{c}_0(\ell) = \dot{c}(\ell) = \dot{c}(x) \quad \text{ sowie }$$

$$v(0, 0) = c_0(0) = c(0) = x_0 \quad \text{ und } v(0, s) = c_s(0) = x_0$$

$$\text{also } \partial_s v(0, 0) = 0 ;$$

$$v(\ell, 0) = c_0(\ell) = c(\ell) = x = h(0) \quad \text{ und } v(\ell, s) = c_s(\ell) = h(s) \quad \text{ also }$$

$$\partial_s v(\ell, 0) = \dot{h}(0) = w.$$

Wir erhalten also

$$(6) \quad \frac{1}{2\ell} \frac{d}{ds} (L(c_s)^2) \Big|_{s=0} = \langle w, \dot{c}(x) \rangle .$$

3. Andererseits gilt

$$\frac{d}{ds} (L(c_s)^2) \Big|_{s=0} = 2L(c_0) \frac{d}{ds} (L(c_s)) \Big|_{s=0}$$

$$= 2L(c) \frac{d}{ds} (L(c_s)) \Big|_{s=0}$$

$$= 2\ell \frac{d}{ds} (L(c_s)) \Big|_{s=0} .$$

Nach Definition von c_s , r_M und dem Gradientenfeld Dr_M gilt:

$$L(c_s) = r_M(c_s(\ell)) = r_M(h(s)) \quad \text{ und } .$$

$$\frac{d}{ds} \langle L(c_s) \rangle \big|_{s=0} = \langle Dr_M(h(0)), \dot{h}(0) \rangle = \langle Dr_M(x), w \rangle$$

also insgesamt

$$(7) \quad \frac{d}{ds} \langle L(c_s)^2 \rangle \big|_{s=0} = 2 \ell \langle Dr_M(x), w \rangle .$$

4. Aus (6) und (7) folgt

$$\langle Dr_M(x), w \rangle = \langle \dot{c}(x), w \rangle$$

also, da $w \in T_x M$ beliebig gewählt war:

$$\langle Dr_M(x) - \dot{c}(x), w \rangle = 0 \quad \forall w \in T_x M$$

und damit $Dr_M(x) = \dot{c}(x)$.

Damit ist auch Hilfssatz 7 bewiesen.

Hilfssatz 8:

Für $t \geq t_0 > 0$ gilt $\coth t \leq \coth t_0 =: c(t_0)$

Beweis:

Auf $[t_0, \infty)$ ist $\coth t = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}}$ von der Klasse C^∞ mit

$$\frac{d}{dt} \coth t = - \frac{1}{\sinh^2 t} < 0 \quad \forall t \in [t_0, \infty), \text{ also ist } \coth t \text{ auf}$$

$[t_0, \infty)$ streng monoton fallend.

7.2. Tabellarische Übersicht

Die folgende tabellarische Übersicht enthält die dem Verfasser bekannten, im Rahmen dieser Arbeit relevanten Liouville-Sätze für (sub-, super-) harmonische Funktionen und harmonische Abbildungen auf riemannschen Mannigfaltigkeiten.

Es werden die Autorennamen mit den Verweisen auf die Original-literatur angegeben.

Dazu werden stichwortartig die Bedingungen zusammengefaßt, unter denen ein Liouville-Satz gilt.

Grundsätzlich wird vorausgesetzt, daß die Urbildmannigfaltigkeit M , deren Dimension jeweils angegeben wird, eine vollständige, (einfach) zusammenhängende riemannsche Mannigfaltigkeit ist.

Die Bildmannigfaltigkeit N (im Fall harmonischer Abbildungen) ist eine n -dimensionale, vollständige riemannsche Mannigfaltigkeit. Die Tabelle ist so in Einzelabschnitte unterteilt, daß in den Zeilen jeweils inhaltlich vergleichbare Aussagen zu jeder Spalte (1. Spalte: (sub-, super-) harmonische Funktionen; 2. Spalte: harmonische Abbildungen) stehen.

Liouville-Sätze auf riemannschen
Mannigfaltigkeiten
für

(sub-, super-) harmonische Funktionen f

Blanc/Fiala/Huber [3], [35]

M^2 , Gaußsche Krümmung $K(x)$,
 $K^-(x) = \max\{-K(x), 0\}$, $\int_M K^-(x) d\text{vol}(x) < \infty$,
f einseitig beschränkt harmonisch bzw.
nicht positiv subharmonisch.

Milnor/Greene/Wu [53], [22]

M^2 Modell mit Pol, Gaußsche Krümmung
 $K(x) \geq -\frac{1}{r^2 \log r}$ für $r \geq r_0$, $r = \text{dist}(x, \text{Pol})$,
f beschränkt harmonisch.

Karp/Milnor/Greene/Wu [45], [22]

M^2 , $x_0 \in M$, Gaußsche Krümmung
 $K(x) \geq -\frac{1}{r^2 \log r}$, $r \geq r_0$, $r = \text{dist}(x, x_0)$,
f beschränkt harmonisch bzw. negativ
subharmonisch.

harmonische Abbildungen f

Moser/Greene/Wu [54], [22], [27]

M^m "simple", f beschränkt (einseitig be-
schränkt) harmonisch.

Hildebrandt/Jost/Widman [30]

M^m "simple", Schnittkrümmung $(N) \leq K$ mit $K \geq 0$,
 $Q \in N$ Bild $f \subseteq B_R(Q)$ geod. Kugel mit $R < \pi/2\sqrt{K}$

Tachikawa [62]

M^m "simple", f lokales Minimum des Energie-
funktional, Bild $f \subseteq B_R(Q)$ geod. Kugel um
 $Q \in N$, R abhängig von der Schnittkrümmung (N) .

Greene/Wu [22], [63]

M^m Mgf. mit Pol p, $r = \text{dist}(x, p)$,
 $-k(r) \leq \text{Radialkrümmung}_M(x) \leq K(r)$;
 k, K nicht negative stetige Fkt.,
 $\int_0^\infty sK(s)ds \leq 1$, $\int_0^\infty sk(s)ds < \infty$, f einseitig
beschränkt harmonisch.

Cheng [7]

M^m , Ricci-Krümmung $(M) \geq 0$, Schnittkrümmung
 $(N) \leq 0$, f wächst sublinear.

Choi [9]

M^m , Ricci-Krümmung $(M) \geq 0$, Schnittkrümmung
 $(N) \leq K$, $K \geq 0$, $Q \in N$, Bild $f \subseteq B_R(Q)$ geod.
Kugel mit $R < \pi/2\sqrt{K}$

Yau [66]

M^m , Ricci-Krümmung $(M) \geq 0$, f beschränkt
harmonisch.

Karp [45]

M^m , moderates Volumenwachstum, f einseitig
beschr. harmonisch bzw. neg. subharmonisch,
pos. superharm.

Karp [45]

M^m , moderates Volumenwachstum, Schnittkrümmung $(N) \leq 0$,
 $f(M) \subseteq N$ relativ kompakt.

Karp [45]

M^m , moderates Volumenwachstum, Schnittkrümmung und > 0 außerhalb Kompaktum, $f(M) \subseteq N$ relativ kompakt.

Karp [44]

M^2 , Gaußsche Krümmung $(M) \geq 0$, f harmonisch bzw. subharmonisch, $\|\text{grad } f\|_{L^2} < \infty$.

Greene/Wu [21]

M^m , Schnittkrümmung $(M) \geq 0$, f harmonisch, $\|\text{grad } f\|_{L^2} < \infty$.

Karp [44]

M^m , Schnittkrümmung $(M) \geq 0$, f harmonisch bzw. subharmonisch, $\|\text{grad } f\|_{L^m/(m-1)} < \infty$.

Sealey [59]

$M = \mathbb{R}^m$ bzw. B^m , $m \geq 3$, Metrik $ds^2 = g^2(x)dx^2$ bzw. $g^2(r)dx^2$, r euklid. Abstand, geom. Bedingungen an g , f harmonisch, $\|\text{grad } f\|_{L^2} < \infty$.

Greene/Wu [21], [22]

M^m , Schnittkrümmung $(M) \geq 0$ außerhalb eines Kompaktums, f harmonisch, $f \in L^p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Yau [67]

M^m , f harmonisch bzw. nicht neg. subharmonisch und glatt, $f \in L^2$ oder $f \in L^p$, $p > 1$.

Karp [45]

M^m , f harmonisch mit moderatem L^p -Wachstum.

Greene/Wu [21], [22]

M^m Cartan-Hadamard-Mannigfaltigkeit, f harmonisch und $f \in L^p$, $1 \leq p < \infty$.

Garber et al./ Fells/Hildebrandt/Price [15], [27], [28]

$M = \mathbb{R}^m$, Energie $E(f) < \infty$.

Morrey/Hildebrandt [27]

M^m , N "simple" f harm., strikt stabil, $E(f) < \infty$.

Schoen/Yau [60]

M^m , Ricci-Krümmung $(M) \geq 0$, N kompakt mit Schnittkrümmung $(N) \leq 0$, Energie $E(f) < \infty$.

Sealey [59]

$M = \mathbb{R}^m$ bzw. B^m , $m \geq 3$, N beliebig, Metrik auf M $ds^2 = g^2(x)dx^2$ bzw. $g^2(r)dx^2$, r euklid. Abstand, geom. Bedingung an g , Energie $E(f) < \infty$.

Goldberg/Ishihara [18], [20]

$M = \mathbb{R}^m$, Schnittkrümmung $(N) \leq K < 0$, $f: E^m \rightarrow N$ harmonisch und K -quasikonform im verallgemeinerten Sinn.

Goldberg/Ishihara/Petridis [19]

M^m "lokal flach", Schnittkrümmung $(N) \leq K < 0$, f harmonisch mit K -beschränkter Dilation (K -quasikonform).

8. Literatur

- [1] Berger, M.; Gauduchon, P.; Mazet, E.
Le spectre d'une variété riemannienne
Lecture notes in Math. 194; Springer; Berlin, Heidelberg,
New York 1971
- [2] Bishop, R.L.; Crittenden, R.J.
Geometry of manifolds
Academic Press; New York, London 1964
- [3] Blanc, C.; Fiala, F.
Le type d'une surface et sa courbure totale
Comm. Math. Helv. 14 (1941/42) 230-233
- [4] Borchers, H.J.; Garber, W.D.
Analyticity of solutions of the $O(N)$ non-linear σ -model
Comm. Math. Phys. 71 (1980) 299-309
- [5] Calabi, E.
An Extension of E. Hopf's Maximum Principle With An
Application To Riemannian Geometry
Duke Math. J. 25 (1958) 45-56
- [6] Cheeger, J.; Ebin, D.G.
Comparison Theorems in Riemannian Geometry
North Holland; Amsterdam 1975
- [7] Cheng, S.Y.
Liouville Theorem For Harmonic Maps
in: Ossermann; Weinstein (Hrsg.)
Geometry of the Laplace Operator
AMS Proc. Symp. Pure Math. XXXVI 1980, S. 147-151
- [8] Cheng, S.Y.; Yau, S.T.
Differential equations on Riemannian manifolds and their
geometric applications
Comm. Pure Appl. Math. 28(1975) 333-354

- [9] Choi, H.I.
On the Liouville Theorem for harmonic maps
Proc. Ann. Math. Soc. 85(1) (1982) 91-94
- [10] Davis, B.
Picard's theorem and Brownian motion
Trans. Ann. Math. Soc. 213(1975) 353-362
- [11] Eells, J.; Sampson, J.H.
Harmonic mappings of Riemannian manifolds
Ann. J. Math. 86(1964) 109-160
- [12] Eells, J.; Lemaire, L.
A Report on Harmonic Maps
Bull. London Math. Soc. 10(1978) 1-68
- [13] Federer, H.
Geometric Measure Theory
Springer; Berlin, Heidelberg, New York 1969
- [14] Forger, M.
Instantons in nonlinear σ -Models, Gauge Theories and
General Relativity
Lecture notes in Physics 139 (Hrsg. H.D. Deubner)
S. 110-134; Springer; Berlin, Heidelberg, New York 1981
- [15] Garber, W.D.; Ruijsenaars, S.N.M.; Seiler, E.; Burns, D.
On Finite Action Solutions of the Nonlinear σ -Model
Annals of Physics 119(1979) 305-325
- [16] Giaquinta, M.; Giusti, E.
On the regularity of the minima of variational integrals
Acta Math. 148(1982) 31-46
- [17] Giaquinta, M.; Hildebrandt, S.
A priori estimates for harmonic mappings
Journal für die Reine u. Angew. Math. 336(1982) 124-164

- [18] Goldberg, S.I.; Ishihara, T.
Harmonic Quasiconformal Mappings of Riemannian Manifolds
Ann. J. Math. 98(1976) 225-240 und
Bull. Ann. Math. Soc. 80(1974) 562-566
- [19] Goldberg, S.I.; Ishihara, T.; Petridis, N.C.
Mappings of bounded dilatation of Riemannian manifolds
J. Diff. Geom. 10(1975) 619-630
- [20] Goldberg, S.I.
Mappings of nonpositively curved manifolds
Nagoya Math. J. 61(1976) 73-84
- [21] Greene, R.E.; Wu, H.
Integrals of Subharmonic Functions on Manifolds of
Nonnegative Curvature
Inventiones math. 27(1974) 265-298
- [22] Greene, R.E.; Wu, H.
Function Theory on Manifolds which possess a pole
Lecture notes in math. 699
Springer; Berlin, Heidelberg, New York 1979
- [23] Gromoll, D.; Klingenberg, W.; Meyer, W.
Riemannsche Geometrie im Großen
Lecture notes in math. 55
Springer; Berlin, Heidelberg, New York 2. Aufl. 1975
- [24] Hamilton, R.S.
Harmonic maps of manifolds with boundary
Lecture notes in math. 471
Springer; Berlin, Heidelberg, New York 1975
- [25] Hartman, P.
On homotopic harmonic maps
Can. J. Math. 19(1967) 673-687
- [26] Hildebrandt, S.
Entire solutions of nonlinear elliptic systems and an
approach to Bernstein's theorem

in: Brézis; Lions (Hrsg.)

Nonlinear partial differential equations and their applications

Collège de France sem. Vol. I (1976)

Research notes in math. 53

Pitman; Boston, London, Melbourne 1980, S. 251-292

- [27] Hildebrandt, S.

Nonlinear elliptic Systems and harmonic mappings

in: Proc. of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential Equations, Vol. 1, pp. 481-615.
Science Press; Beijing (China) 1982

- [28] Hildebrandt, S.

Liouville theorems for harmonic mappings and an approach to Bernstein theorems

in: Annals of Math. Studies 102, S.T. Yau (Hrsg.)

Seminar on Differential Geometry, p. 107-131

Princeton Univ. Press; Princeton 1982

- [29] Hildebrandt, S.

Partielle Differentialgleichungen und Differentialgeometrie
DMV Jahresbericht 85(3) (1983) 129-145

- [30] Hildebrandt, S.; Jost, J.; Widman, K.-O.

Harmonic mappings and minimal surfaces

Inventiones math. 62(1980) 269-298

- [31] Hildebrandt, S.; Kaul, H.; Widman, K.-O.

Harmonic mappings into riemannian manifolds with non-positive sectional curvature

Math. Scand. 37(1975) 257-263

- [32] Hildebrandt, S.; Kaul, H.; Widman, K.-O.

Dirichlet's boundary value problem for harmonic mappings of Riemannian manifolds

Math. Z. 147(1976) 225-236

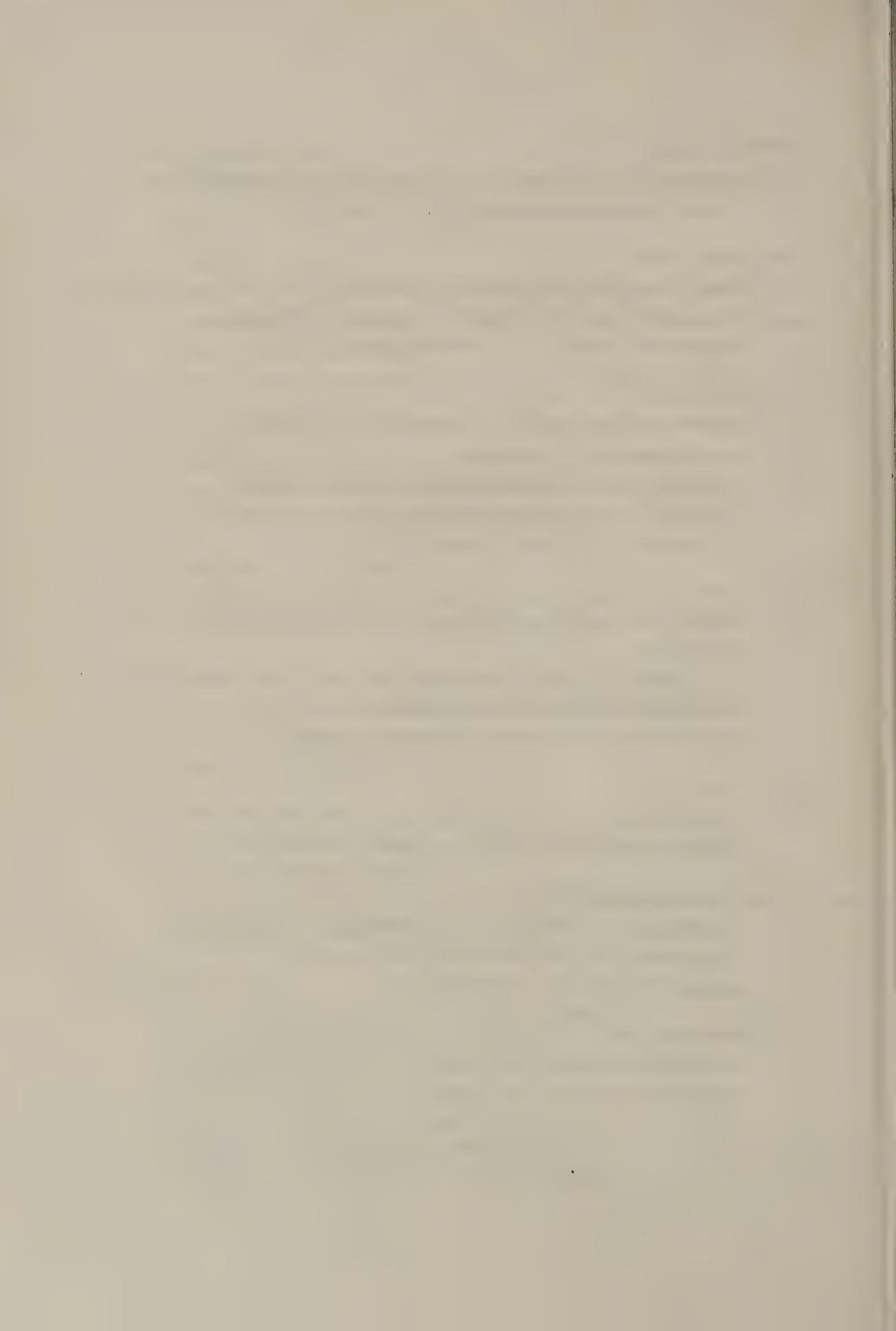
- [33] Hildebrandt, S.; Kaul, H.; Widman, K.-O.
An existence theory for harmonic mappings of Riemannian manifolds
Acta Math. 138(1977) 1-16
- [34] Hildebrandt, S.; Widman, K.-O.
Sätze vom Liouvilleschen Typ für quasilineare elliptische Gleichungen und Systeme
Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II. Math.-Phys. Klasse, Nr. 4(1979) 41-59
- [35] Huber, A.
On subharmonic functions and differential geometry in the large
Comm. Math. Helv. 32(1957) 13-72
- [36] Ivert, P.A.
On Quasilinear Elliptic Systems of Diagonal Form
Math. Z. 170(1980) 283-286
- [37] Jäger, W.; Kaul, H.
Uniqueness and stability of harmonic maps and their Jacobi-fields
manuscripta math. 28(1979) 269-291
- [38] Jäger, W.; Kaul, H.
Uniqueness of harmonic mappings and of solutions of elliptic equations on riemannian manifolds
Math. Ann. 240(1979) 231-250
- [39] Jost, J.
Eine geometrische Bemerkung zu Sätzen über harmonische Abbildungen, die ein Dirichletproblem lösen
manuscripta math. 32(1980) 51-57
- [40] Jost, J.
Eindeutigkeit harmonischer Abbildungen
Diplomarbeit, Bonn 1979
gekürzte Fassung:
Univalence of harmonic mappings between surfaces
Journal für die Reine u. Angew. Math. 324(1981) 141-153

- [41] Jost, J.
Ein Existenzbeweis für harmonische Abbildungen, die ein
Dirichletproblem lösen, mittels der Methode des Wärme-
flusses
manuscripta math. 34(1981) 17-25
- [42] Jost, J.
A maximum principle for harmonic mappings which solve a
Dirichlet Problem
manuscripta math. 38(1982) 129-130
- [43] Kampmann, J.
Liouville-Sätze bei linearen und quasilinearen elliptischen
Differentialgleichungen zweiter Ordnung
Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum 1980
- [44] Karp, L.
On Stokes' Theorem for Noncompact Manifolds
Proc. Ann. Math. Soc. 82(1981) 487-490
- [45] Karp, L.
Subharmonic Functions on Real and Complex Manifolds
Math. Z. 179(1982) 535-554
- [46] Kasue, A.
On Laplacian and Hessian Comparison Theorems
Proc. Japan Acad. Ser. A 58(1) (1982) 25-28
- [47] Kendall, W.S.
Brownian motion, negative curvature and harmonic maps
in: Stochastic Integrals (Hrsg. D. Williams)
Proc. L.M.S. Durham Sympos. 1980
Lecture notes in math. 851, S. 479-491
Springer; Berlin, New York 1981
- [48] Kendall, W.S.
Brownian motion and a generalised little Picard's theorem
Trans. Am. Math. Soc. 275(2) (1983) 751-760

- [49] Kobayashi, S.; Nomizu, K.
Foundations of Differential Geometry Vol. I
Wiley & Sons; New York, Toronto 1963
- [50] Kobayashi, S.; Nomizu, K.
Foundations of Differential Geometry Vol. II
Wiley & Sons; New York, Toronto 1969
- [51] Lichnerowicz, A.
Applications harmoniques et variétés Kähleriennes
in: Symposia Mathematica III, S. 340-402
Academic Press; London, New York 1970
- [52] Meier, M.
Liouville theorems for nonlinear elliptic equations
and systems
manuscripta math. 29(1979) 207-228
- [53] Milnor, J.
On Deciding Whether A Surface Is Parabolic or Hyperbolic
Ann. Math. Monthly 84(1977) 43-46
- [54] Moser, J.
On Harnack's theorem for elliptic differential equations
Comm. Pure Appl. Math. 14(1961) 577-591
- [55] Nishikawa, S.
On the Neumann Problem for the Nonlinear Parabolic
Equation of Eells-Sampson and Harmonic Mappings
Math. Ann. 249(1980) 177-190
- [56] Price, P.
A Monotonicity Formula for Yang-Mills Fields
manuscripta math. 43(2/3) (1983) 131-166
- [57] de Rham, G.
Variétés différentiables
Hermann; Paris 1955

- [58] Sampson, J.H.
Some Properties And Applications of Harmonic Mappings
Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 11(1978) 211-228
- [59] Sealey, H.C.J.
Some conditions ensuring the vanishing of harmonic
differential forms with applications to harmonic maps
and Yang-Mills theory
Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. 91(1982) 441-452
- [60] Schoen, R.; Yau, S.T.
Harmonic maps and the topology of stable hypersurfaces
and manifolds with nonnegative Ricci-curvature
Comm. Math. Helv. 39(1976) 333-341
- [61] Schoen, R.; Uhlenbeck, K.
A Regularity Theory For Harmonic Maps
Journ. Diff. Geom. 17(1982) 307-335
- [62] Tachikawa, A.
On Interior Regularity and Liouville's Theorem For
Harmonic Mappings
manuscripta math. 42(1983) 11-40
- [63] Wu, H.
Function Theory on Noncompact Kähler Manifolds
in: DMV Seminar Band 3,
Complex Differential Geometry (S. Kobayashi, H. Wu), S. 68-123
Birkhäuser; Basel, Boston, Stuttgart 1983
- [64] Xin, Y.L.
Some Results on stable harmonic maps
Duke Math. J. 47(1980) 609-613
- [65] Yano, K.; Bochner, S.
Curvature And Betti Numbers
Annals of Mathematical Studies 32
Princeton University Press, Princeton 1953

- [66] Yau, S.T.
Harmonic Functions on Complete Riemannian Manifolds
Comm. Pure Appl. Math. 28(1975) 201-228
- [67] Yau, S.T.
Some function theoretic properties of complete Riemannian
manifolds and their applications to geometry
Indiana U. Math. J. 25(1976) 659-670
- [68] Yau, S.T.
Harmonic maps between Riemannian Manifolds
in: Byrnes, C.I. (Hrsg.)
Partial Differential Equations and geometry
Lecture notes in Pure Appl. math. 48, S. 307-311
M. Dekker; New York, Basel 1979
- [69] Yau, S.T.
Survey on partial differential equations in differential
geometry
in: Annals of Math. Studies 102, S.T. Yau (Hrsg.)
Seminar on differential geometry, p. 3-71
Princeton Univ. Press; Princeton 1982
- [70] Yau, S.T.
The heat kernel of a complete riemannian manifold
Journ. Math. Pure Appl. 57(1978) 191-201
- [71] Jost, J.; Karcher, H.
Geometrische Methoden zur Gewinnung von a priori
Schranks für harmonische Abbildungen
manuscripta math. 40(1982) 27-77
- [72] Sperner, E.
A priori Gradient Estimates for Harmonic Mappings
SFB 72 Preprint, Bonn 1982



Jürgen Kampmann
Mozartstr. 3
4620 Castrop-Rauxel

Tabellarischer Lebenslauf

Persönliche Daten

Jürgen Kampmann, geboren am 10.05.1954
in Castrop-Rauxel als Sohn des Metzger-
meisters Karl Kampmann und Cäcilie
Kampmann, geb. Hentrich.
Verheiratet seit dem 04.04.1981 mit
Dr. rer. oec. Ricarda Kampmann, geb.
Müller; keine Kinder.

Schulausbildung

1960 - 1964

Besuch der kath. Volksschule
St. Lambertus in Castrop-Rauxel

1964

Wechsel zum Adalbert-Stifter-Gymnasium
in Castrop-Rauxel

17.05.1972

Abiturprüfung

Studium

Wintersemester

Immatrikulation an der Ruhr-Universität
Bochum für die Fächer Mathematik und
Physik, Studiendauer insgesamt:
11 Semester

1972/73

unterbrochen durch

Grundwehrdienst

01.04.73-30.06.74

Wintersemester

Wiederaufnahme des Studiums mit dem
1. Fachsemester

1974/75

seit April 1976

Stipendiat des Cusanuswerks

23.06.1975

Vordiplom in Mathematik mit Nebenfach
Physik mit der Gesamtnote "gut"

18.03.1980

Diplom in Mathematik mit Nebenfach
Physik, Gesamturteil: "mit Auszeichnung"

Bisherige berufliche Tätigkeit

Seit dem 19.03.1980 wissenschaftlicher
Mitarbeiter an der Abteilung für Mathe-
matik der Ruhr-Universität Bochum bei
Herrn Prof. Dr. R. Böhme.

